Fundamente der Computational Intelligence
– Teil 4 –

Günter Rudolph
Fachbereich Informatik, Lehrstuhl XI
Fachgebiet *Computational Intelligence*

WS 2005/06

Fuzzy Relationen

Relationen mit scharfen Mengen $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$:

$$R(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n) \subseteq \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots \times \mathcal{X}_n$$

Da kartesisches Produkt eine Menge ist
$\Rightarrow$ alle Mengenoperationen bleiben gültig!

Scharfe Zugehörigkeitsfunktion (von x zur Relation R)

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Fuzzy Relationen

Fuzzy Relation :=
Fuzzy-Menge auf scharfem kartesischen Produkt
$\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \times \ldots \times \mathcal{X}_n$

Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ haben verschiedene Zugehörigkeitsgrade zur Relation

Zugehörigkeitsgrad beschreibt Stärke der Relation zwischen Elementen des Tupels

Geeignete Darstellung: n-dim. Zugehörigkeitsmatrix

Fuzzy Mengen: Beispiel

Sei
$\mathcal{X} = \{$New York, Paris$\}$ und
$\mathcal{Y} = \{$Bejing, New York, Dortmund$\}$.

Relation R soll „sehr weit entfernt“ repräsentieren

Zugehörigkeitsmatrix (Z-Matrix):

	New York	Paris
Bejing	1.0	0.9
New York	0.0	0.7
Dortmund	0.6	0.3

Binäre Fuzzy Relation

Definition

dom R ist Fuzzy-Menge über $\mathcal{X}$ mit

$$\forall x \in \mathcal{X} : (\text{dom}\, R)(x) = \max_{y \in \mathcal{Y}} R(x, y)$$

$\square$

Also:

Jedes $x \in \mathcal{X}$ gehört zur Domain von R im Grade gleich der Stärke der stärksten Beziehung zu irgendeinem Mitglied von $\mathcal{Y}$

Binäre Fuzzy Relation

Definition

ran R ist Fuzzy-Menge über $\mathcal{Y}$ mit

$$\forall y \in \mathcal{Y} : (\text{ran}\, R)(y) = \max_{x \in \mathcal{X}} R(x, y)$$

$\square$

Also:

Die Stärke der stärksten Beziehung, die jedes Element von $\mathcal{Y}$ zu einem Element in $\mathcal{X}$ hat ist gleich dem Zugehörigkeitsgrad im Wertebereich (range) von R.

Binäre Fuzzy Relationen

Definition

Die zur Fuzzy-Relation $R(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ inverse Fuzzy-Relation $R^{-1}(\mathcal{Y},\mathcal{X})$ ist eine Fuzzy-Relation auf $\mathcal{Y}\times\mathcal{X}$ mit Zugehörigkeitsmatrix $\mathbf{R}^{-1}=\mathbf{R}^T$. $\square$

$\mathbf{R}^T$ ist die transponierte Matrix von Z-Matrix $\mathbf{R}$

Offensichtlich gilt: $\left(\mathbf{R}^{-1}\right)^{-1}=\mathbf{R}$ wg. $\left(\mathbf{R}^{T}\right)^{T}=\mathbf{R}$

Max-min-Komposition von Fuzzy-Relationen

Seien $P(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ und $Q(\mathcal{Y},\mathcal{Z})$ zwei Fuzzy-Relationen.

$$R(\mathcal{X},\mathcal{Z}) = P(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \circ Q(\mathcal{Y},\mathcal{Z})$$

mit

$$\begin{aligned} R(x,z) &= (P \circ Q)(x,z) \\ &= \max_{y\in\mathcal{Y}} \min\{P(x,y), Q(y,z)\} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathcal{X}$ und $z \in \mathcal{Z}$. $\square$

Binäre Fuzzy Relationen

Satz

Es gilt:

a) $(P(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \circ Q(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}))^{-1} = Q^{-1}(\mathcal{Z}, \mathcal{Y}) \circ P^{-1}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$

b) max-min-Komposition ist assoziativ

c) max-min-Komposition ist nicht kommutativ $\square$

Binäre Fuzzy Relationen

max-min-Komposition läßt sich berechnen durch Fuzzy-Matrizenrechnung: $\mathbf{R} = \mathbf{P} \circ \mathbf{Q}$

$$r_{ij} = \max_k \min\{p_{ik}, q_{kj}\}$$

zum Vergleich:
scharfe Matrizenrechnung $\mathbf{R} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$

$$r_{ij} = \sum_k p_{ik} \cdot q_{kj}$$

Binäre Fuzzy Relationen

Beispiel:

$$
\begin{array}{c|c}
\mathbf{R} = \mathbf{P} \circ \mathbf{Q} & \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.9 & 0.1 \\ 0.9 & 0.1 & 0.2 & 0.5 \\ 1.0 & 0.9 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \\
\hline
\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.9 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.8 & 0.8 & 0.9 & 0.5 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
r_{23} &= \max\{\min\{p_{21}, q_{13}\}, \min\{p_{22}, q_{23}\}, \min\{p_{23}, q_{33}\}\} \\
&= \max\{\min\{0.9, 0.9\}, \min\{0.7, 0.2\}, \min\{0.8, 0.0\}\} \\
&= \max\{0.9, 0.2, 0.0\} \; = \; 0.9
\end{aligned}
$$