Fundamente der Computational Intelligence
– Teil 3 –

Günter Rudolph
Fachbereich Informatik, Lehrstuhl XI
Fachgebiet *Computational Intelligence*

WS 2005/06

Standard Fuzzy Operatoren

Bisher betrachtet:

Standard Fuzzy Operatoren

- $A^c(x) = 1 - A(x)$
- $(A \cap B)(x) = \min\{A(x), B(x)\}$
- $(A \cup B)(x) = \max\{A(x), B(x)\}$

sind kompatibel mit den Operatoren
für gewöhnliche Mengen
mit Zugehörigkeitsfunktionen mit Wertebereich $\in \{0, 1\}$

Verallgemeinerte Fuzzy Operatoren

Frage: $\exists$ Nicht-Standard-Operatoren?

- Ja!
- Sogar viele!
- Lassen sich charakterisieren . . . (wie?)
- . . . durch Festlegung „sinnvoller“ Axiome für
  - Komplement
  - Schnittmenge
  - Vereinigung

Fuzzy Komplement: Axiome

Sei $c : [0,1] \longrightarrow [0,1]$.

(A1) $c(0) = 1$ und $c(1) = 0$

(A2) $\forall a, b \in [0,1] : a \leq b \;\Rightarrow\; c(a) \geq c(b)$ (monoton)

Axiome (A1) und (A2) sind das Grundgerüst.
Ohne sie kein Komplementbegriff möglich.
Oft zusätzlich:

(A3) $c(\cdot)$ ist stetig

(A4) $\forall a \in [0,1] : c(c(a)) = a$ (involutiv)

Fuzzy Komplement: Beispiele

a) $c(a) = \begin{cases} 1 & \text{für } a \leq t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für $0 < t < 1$.

$\longrightarrow$ verletzt (A3) weil unstetig

$\longrightarrow$ verletzt (A4) weil z.B. $c(c(\frac{1}{4})) = c(1) = 0 \neq \frac{1}{4}$ für $t = \frac{1}{2}$

b) $c(a) = \dfrac{1 + \cos(\pi\, a)}{2}$

$\longrightarrow$ verletzt (A4) weil z.B. $c(c(\frac{1}{3})) = c(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}\,(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \neq \frac{1}{3}$

Fuzzy Komplement: Beispiele

c) $c(a) = \dfrac{1-a}{1+\lambda\, a}$ für $\lambda > -1$ (Sugeno-Klasse)

d) $c(a) = (1-a^w)^{\frac{1}{w}}$ für $w > 0$ (Yager-Klasse)

Fuzzy Komplement: Fixpunkte

Satz

Erfüllt die Funktion $c : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ die Axiome (A1) und (A2) für das Fuzzy-Komplement, dann besitzt sie höchstens einen Fixpunkt a^* mit $c(a^*) = a^*$. $\square$

Bemerkung

Gilt zusätzlich (A3) $\Rightarrow$ exakt 1 Fixpunkt! $\square$

Weitere Eigenschaften beweisbar,
aber nicht in dieser Vorlesung!

Fuzzy Komplement: Fixpunkte

Übrigens: Wie erhält man den Fixpunkt grafisch?

Zeichne Winkelhalbierende a und $c(a)$
$\exists$ Schnittpunkt: $\Rightarrow$ Fixpunkt!

Fuzzy Komplement: 1. Charakterisierung

Satz:
$c : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ ist involutives Fuzzy-Komplement $\Leftrightarrow$
$\exists$ stetige Funktion $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit Eigenschaften

- $g(0) = 0$,
- streng monoton wachsend,
- $\forall a \in [0,1] : c(a) = g^{(-1)}(g(1) - g(a))$. $\square$

$g(\cdot)$ heißt *ansteigender Generator*
$g^{(-1)}(\cdot)$ ist Pseudo-Inverse zu $g(\cdot)$

Fuzzy Komplement: Ansteigende Generatoren

Beipiel: $g(a) = a$

- $g(0) = 0$
- streng monoton steigend wg. $g'(a) = 1 > 0$
- Inverse auf $[0,1]$ ist $g^{-1}(a) = a$, also

$$c(a) = g^{-1}(g(1) - g(a)) = g^{-1}(1 - a) = 1 - a$$

$\Rightarrow$ ergibt das Standard-Komplement

Fuzzy Komplement: Ansteigende Generatoren

Beipiel: $g(a) = \frac{1}{\lambda} \log_e(1 + \lambda\, a)$ für $\lambda > -1$

- $g(0) = \log_e(1) = 0$
- str. mon. st. wegen $g'(a) = \frac{1}{1+\lambda\, a} > 0$ für $a \in [0, 1]$
- Inverse auf $[0, 1]$ ist $g^{-1}(a) = \frac{\exp(\lambda\, a)-1}{\lambda}$, also

$$
\begin{aligned}
c(a) &= g^{-1}\left(\frac{\log(1+\lambda)}{\lambda} - \frac{\log(1+\lambda\, a)}{\lambda}\right) \\
&= \frac{\exp(\log(1+\lambda) - \log(1+\lambda\, a)) - 1}{\lambda} \\
&= \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1+\lambda}{1+\lambda\, a} - 1\right) = \frac{1-a}{1+\lambda\, a} \quad \text{(Sugeno-Kompl.)}
\end{aligned}
$$

Fuzzy Komplement: 2. Charakterisierung

Satz:
$c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ist involutives Fuzzy-Komplement $\Leftrightarrow$
$\exists$ stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit Eigenschaften

- $f(1) = 0$,
- streng monoton fallend,
- $\forall a \in [0, 1] : c(a) = f^{(-1)}(f(0) - f(a))$. $\square$

$f(\cdot)$ heißt *absteigender Generator*
$f^{(-1)}(\cdot)$ ist Pseudo-Inverse zu $f(\cdot)$

Fuzzy Komplement: Absteigende Generatoren

Beipiel: $f(a) = -k\,a + k$ für $k > 0$

- $f(1) = 0$
- streng monoton fallend wg. $f'(a) = -k < 0$
- Inverse auf $[0, 1]$ ist $f^{-1}(a) = 1 - \frac{a}{k}$, also

$$c(a) = f^{-1}(f(0) - f(a)) = f^{-1}(k\,a) = 1 - a$$

$\Rightarrow$ ergibt das Standard-Komplement für beliebiges $k > 0$

Fuzzy Komplement: Absteigende Generatoren

Beipiel: $f(a) = 1 - a^w$ für $w > 0$

- $f(1) = 1 - 1^w = 0$
- str. mon. f. wegen $f'(a) = -w\, a^{w-1} < 0$ für $a \in [0, 1]$
- Inverse auf $[0, 1]$ ist $f^{-1}(a) = (1 - a)^{\frac{1}{w}}$, also

$$c(a) = f^{-1}(f(0) - f(a)) = f^{-1}(a^w) = (1 - a^w)^{\frac{1}{w}}$$

$\Rightarrow$ ergibt das Yager-Komplement

Verallgemeinerte Fuzzy Operatoren

Frage:

Wenn $\exists$ Verallgemeinerungen vom Fuzzy-Komplement, gibt es dann so etwas auch für Fuzzy-Schnittmenge und Fuzzy-Vereinigung?

- Ja! Viele!
- Analoge Vorgehensweise: Axiome!

Fuzzy Schnittmenge: Axiome

Sei $i : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ und $a, b, d \in [0,1]$.

(A1) $i(a, 1) = a$

(A2) $b \leq d \quad \Rightarrow \quad i(a, b) \leq i(a, d)$ (monoton)

(A3) $i(a, b) = i(b, a)$ (kommutativ)

(A4) $i(a, i(b, d)) = i(i(a, b), d)$ (assoziativ)

Axiome (A1) – (A4): Grundgerüst für Fuzzy Schnittmenge.

Die verallgemeinerte Fuzzy Schnittmengenoperation wird ***t-Norm*** genannt!

Fuzzy Schnittmenge: Axiome

Häufig weitere Einschränkungen:

(A5) $i(\cdot, \cdot)$ ist stetig

(A6) $i(a, a) < a$ (Subidempotenz)

(A7) $a_1 < a_2$ und $b_1 < b_2 \Rightarrow i(a_1, b_1) < i(a_2, b_2)$ (str. monoton)

Was ist mit (A6)?
Kann man diese Eigenschaft immer fordern?

„Standard t-Norm“

Satz:
Die Standardversion der Fuzzy Schnittmengenoperation

$$A(x) \cap B(x) = \min\{A(x), B(x)\}$$

ist die einzige idempotente t-Norm.

Beweis: (Übung) $\square$

t-Norm: Beispiele

Name	Funktion
Standard	$i(a,b) = \min\{a,b\}$
Algebraisches Produkt	$i(a,b) = a\,b$
Beschränkte Differenz	$i(a,b) = \max\{0, a+b-1\}$
Drastische Schnittmenge	$i(a,b) = \begin{cases} a & \text{für } b = 1 \\ b & \text{für } a = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Übrigens: Wie weist man t-Norm nach?

$\Rightarrow$ Axiome (A1) – (A4) überprüfen!

t-Norm: Charakterisierung

Satz:

$i : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ ist t-Norm $\quad \Leftrightarrow$
$\exists$ absteigender Generator $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$i(a,b) = f^{(-1)}(f(a) + f(b)). \qquad \square$$

$f^{(-1)}(\cdot)$ ist Pseudo-Inverse zu Generator $f(\cdot)$

t-Norm: Generatoren

Beispiel: $f(a) = \frac{1}{a} - 1$

- $f(1) = \frac{1}{1} - 1 = 0$
- str. mon. fallend wg. $f'(a) = -\frac{1}{a^2} < 0$ auf $(0, 1]$
- Inverse auf $[0, 1]$ ist $f^{-1}(a) = \frac{1}{a+1}$ auf $(0, 1]$, also

$$
\begin{aligned}
i(a, b) &= f^{-1}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 2\right) = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 1} \\
&= \frac{ab}{a + b - a\,b} \quad \text{(Spezialfall aus Dombi 1982)}
\end{aligned}
$$

Fuzzy Vereinigung: Axiome

Sei $u : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ und $a, b, d \in [0,1]$.

(A1) $u(a, 0) = a$

(A2) $b \leq d \quad \Rightarrow \quad u(a, b) \leq u(a, d)$ (monoton)

(A3) $u(a, b) = u(b, a)$ (kommutativ)

(A4) $u(a, u(b, d)) = u(u(a, b), d)$ (assoziativ)

Axiome (A1) – (A4): Grundgerüst für Fuzzy Vereinigung.

Die verallgemeinerte Fuzzy Vereinigungsoperation wird ***s-Norm*** oder ***t-Conorm*** genannt! Hier: <u>s-Norm</u>.

Fuzzy Vereinigung: Axiome

Häufig weitere Einschränkungen:

(A5) $u(\cdot, \cdot)$ ist stetig

(A6) $u(a, a) > a$ (Superidempotenz)

(A7) $a_1 < a_2$ und $b_1 < b_2 \Rightarrow u(a_1, b_1) < u(a_2, b_2)$ (str. monoton)

Was ist mit (A6)?
Kann man diese Eigenschaft immer fordern?

„Standard s-Norm“

Satz:

Die Standardversion der Fuzzy Vereinigungsoperation

$$A(x) \cap B(x) = \max\{A(x), B(x)\}$$

ist die einzige idempotente s-Norm.

Beweis: (analog zur t-Norm) $\square$

s-Norm: Beispiele

Name	**Funktion**
Standard	$u(a,b) = \max\{a,b\}$
Algebraische Summe	$u(a,b) = a + b - a\,b$
Beschränkte Summe	$u(a,b) = \min\{1, a+b\}$
Drastische Vereinigung	$u(a,b) = \begin{cases} a & \text{für } b = 0 \\ b & \text{für } a = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Übrigens: Wie weist man s-Norm nach?

$\Rightarrow$ Axiome (A1) – (A4) überprüfen!

s-Norm: Charakterisierung

Satz:

$u : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ ist s-Norm $\quad \Leftrightarrow$
$\exists$ ansteigender Generator $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$u(a,b) = g^{(-1)}(g(a) + g(b)). \qquad \square$$

$g^{(-1)}(\cdot)$ ist Pseudo-Inverse zu Generator $g(\cdot)$

s-Norm: Generatoren

Beispiel: $g(a) = -\log_e(1-a)$

- $g(0) = -\log(1) = 0$
- str. mon. steigend wg. $g'(a) = \frac{1}{1-a} > 0$ auf $(0,1)$
- Inverse auf $[0,1]$ ist $g^{-1}(a) = 1 - \exp(-a)$ auf $(0,1)$, also

$$\begin{aligned}
u(a,b) &= g^{-1}(-\log(1-a) - log(1-b)) \\
&= 1 - \exp(\log(1-a) + \log(1-b)) \\
&= 1 - (1-a)\,(1-b) \\
&= a + b - a\,b \quad \text{(algebraische Summe)}
\end{aligned}$$

Verallgemeinerte Fuzzy Operatoren

Wir wissen jetzt:

1. Verallgemeinerungen für Komplement, Schnittmenge und Vereinigung basieren auf Axiomensysteme
2. Verallgemeinerungen erzeugbar durch Generatoren
3. $\exists$ jeweils überabzählbar viele Möglichkeiten zur Verallgemeinerung von Komplement, $\cap$ und $\cup$

Frage:

Kann beliebige Kombination aus Komplement, t- und s-Norm verwendet werden?

Kombination verallgemeinerter Fuzzy Operatoren

Klassische Mengenlehre:
$\cap$- und $\cup$-Operation sind dual bzgl. Komplement, weil sie DeMorgansche Gesetze erfüllen

Definition
Eine t-Norm $t(\cdot,\cdot)$ und s-Norm $s(\cdot,\cdot)$ werden *dual bzgl. dem Fuzzy-Komplement* genannt, wenn

$$\begin{aligned} c(t(a,b)) &= s(c(a),c(b)) \\ c(s(a,b)) &= t(c(a),c(b)) \end{aligned}$$

für alle $a,b \in [0,1]$. $\square$

Duale Tripel: Beispiele

Definition

Tripel (t, s, c) mit t und s dual zu c heißt *duales Tripel*. $\square$

t-Norm	**s-Norm**	**Komplement**
$\min\{a, b\}$	$\max\{a, b\}$	c_s
$a\,b$	$a + b - a\,b$	c_s
$\max\{0, a + b - 1\}$	$\min\{1, a + b\}$	c_s

c_s: Standard Fuzzy-Komplement