Fundamente der Computational Intelligence
– Teil 2 –

Günter Rudolph
Fachbereich Informatik, Lehrstuhl XI
Fachgebiet *Computational Intelligence*

WS 2005/06

Grobe Gliederung

1. **Fuzzy Methoden**
2. Evolutionäre Algorithmen
3. Schwarm-Intelligenz
4. Künstliche Neuronale Netze
5. Künstliche Immunnetzwerke

Fuzzy Methoden: Gliederung

Fuzzy Mengen: Literaturnachweis

- **G.J. Klir & B. Yuan:**
  Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications.
  Prentice Hall, Upper Saddle River (NJ) 1995.

- **H. Bandemer & S. Gottwald:**
  Einführung in Fuzzy-Methoden.
  4. Aufl., Akademie Verlag, Berlin 1993.

- **K. Michels, F. Klawonn, R. Kruse & A. Nürnberger:**
  Fuzzy-Regelung.
  Springer: Berlin 2002.

- **Helmut Thiele:**
  Einführung in die Fuzzy-Logik.
  Skript zur Vorlesung, Universität Dortmund, FB4, LS1, 1999.
  `http://irb.cs.uni-dortmund.de/~lehmke/EFL/heavy.pdf`

Definition 1.1
Eine Abbildung $F : \mathcal{X} \to [0,1] \subset \mathbb{R}$, die jedem Element $x \in \mathcal{X}$ seinen ***Zugehörigkeitsgrad*** $F(x)$ zu F zuordnet, wird ***Fuzzy-Menge*** oder ***unscharfe Menge*** genannt. $\square$

herkömmliche, „scharfe“ Menge $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}(x) := 1_{[x \in \mathcal{A}]} := 1_{\mathcal{A}}(x) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } x \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{, falls } x \notin \mathcal{A} \end{cases}$$

scharfe Mengen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$
unscharfe Mengen A, B, . . .

Besondere Fuzzy Mengen: $\mathbb{O}$ und $\mathbb{U}$

Definition 1.2

Sei F eine Fuzzy-Menge über $\mathcal{X}$. Wir sagen:

(a) F ist ***leer***, falls $\forall x \in \mathcal{X} : F(x) = 0$, und

(b) F ist ***universell***, falls $\forall x \in \mathcal{X} : F(x) = 1$. $\square$

Bemerkung 1.1

Die leere (unscharfe) Menge bezeichnen wir mit $\mathbb{O}$,
die universelle (unscharfe) Menge mit $\mathbb{U}$. $\square$

Fuzzy Mengen: Alternative Notationen

(1) $A = \{(x; \mu_A(x)) \mid \mu_A(x) \in [0,1] \wedge x \in \mathcal{X}\}$

(2) $A = \{(x_1; \mu_M(x_1)), (x_1; \mu_M(x_1)), \ldots, (x_n; \mu_M(x_n))$

(3) $A = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$

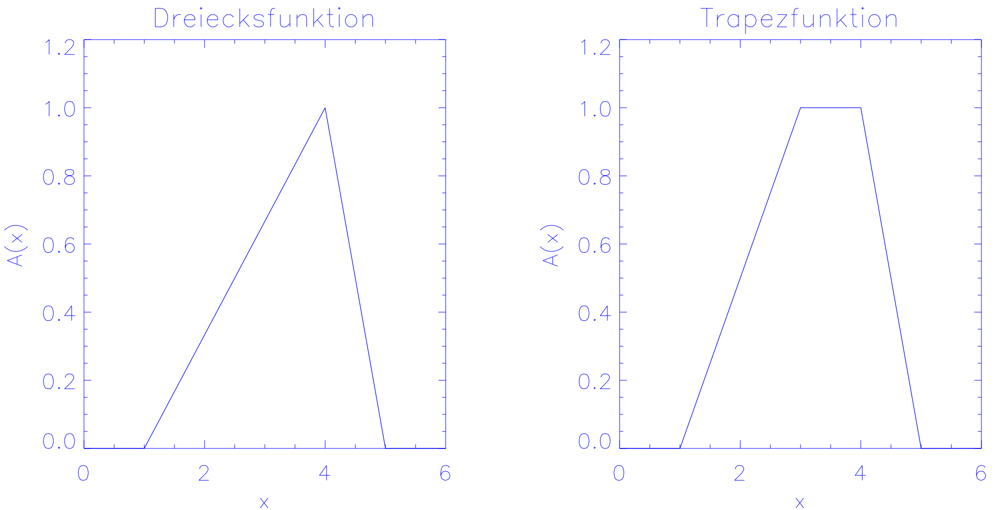
(4) $A = \int_{\mathcal{X}=\mathbb{R}} \frac{\mu_A(x)}{x}$

ad (1) : Wertepaare
ad (2) : Wertepaare, Wertetabelle (endl. Grundmenge $\mathcal{X}$)
ad (3) : „Zadeh-Notation“ $\longrightarrow$ formal-sytaktisch ($\mid \mathcal{X} \mid < \infty$)
ad (4) : „Zadeh-Notation“ $\longrightarrow$ formal-sytaktisch ($\mid \mathcal{X} \mid = \infty$)

$\Rightarrow$ ab jetzt: keine Zadeh-Notation!

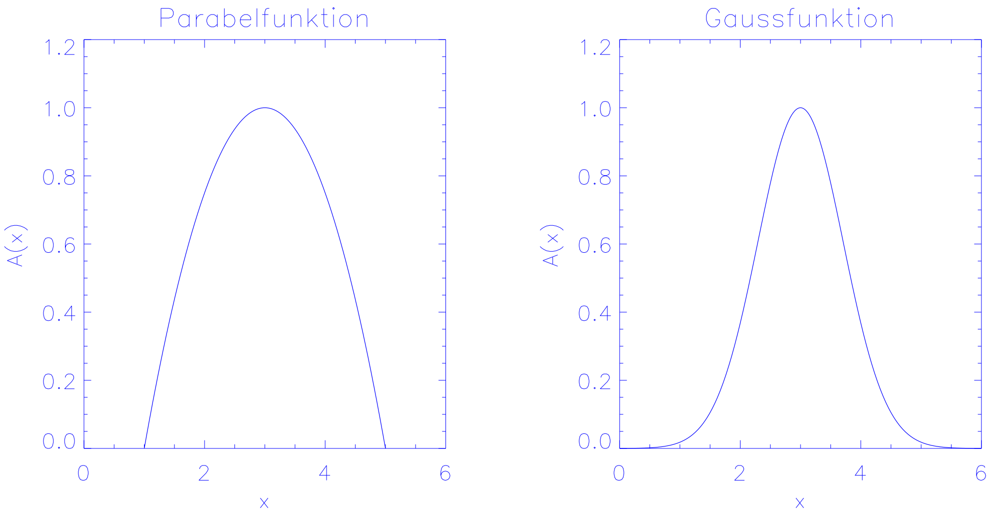
Fuzzy Mengen: Zugehörigkeitsfunktionen (1)

Beispiele:



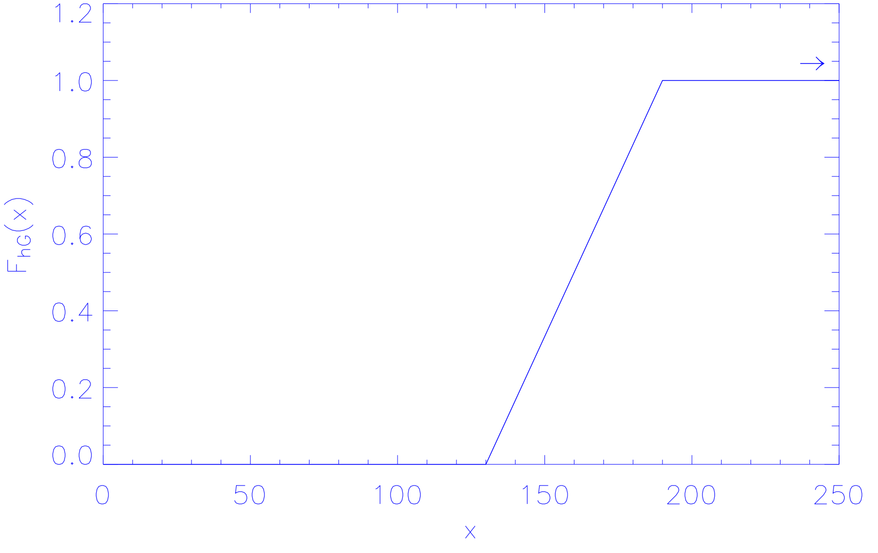
Fuzzy Mengen: Zugehörigkeitsfunktionen (2)

Beispiele:



Fuzzy Mengen: Zugehörigkeitsfunktionen (3)

Fuzzy-Menge F_{hG} der hohen Geschwindigkeiten:



Fuzzy Mengen: Elementare Beziehungen

Definition 1.3

Seien A und B unscharfe Mengen über $\mathcal{X}$.

(a) ***Gleichheit***

$A = B$ falls $\forall x \in \mathcal{X} : A(x) = B(x)$

(b) ***Teilmenge***

$A \subseteq B$ falls $\forall x \in \mathcal{X} : A(x) \leq B(x)$

$A \subset B$ falls $\forall x \in \mathcal{X} : A(x) < B(x)$ $\square$

Fuzzy Mengen: Elementare Beziehungen

Satz 1.1

Für jede unscharfe Menge über A, B und C gilt:

(a) Reflexivität: $A \subseteq A$.

(b) Antisymmetrie: Wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, dann $A = B$.

(c) Transitivität: Wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, dann $A \subseteq C$.

Beweis:

(a) $\forall x \in \mathcal{X} : A(x) \leq A(x)$.

(b) $\forall x \in \mathcal{X} : A(x) \leq B(x)$ und $B(x) \leq A(x) \quad \Rightarrow$
$\forall x \in \mathcal{X} : A(x) = B(x)$.

(c) $\forall x \in \mathcal{X} : A(x) \leq B(x)$ und $B(x) \leq C(x) \quad \Rightarrow$
$\forall x \in \mathcal{X} : A(x) \leq C(x)$. $\square$

Fuzzy Mengen: Operationen

Definition 1.4
Seien A und B unscharfe Mengen über $\mathcal{X}$. Wir nennen

$$C := A \cup B \text{ mit } C(x) := \max\{A(x), B(x)\} \text{ für alle } x \in \mathcal{X}$$

die ***Vereiningung*** von A und B,

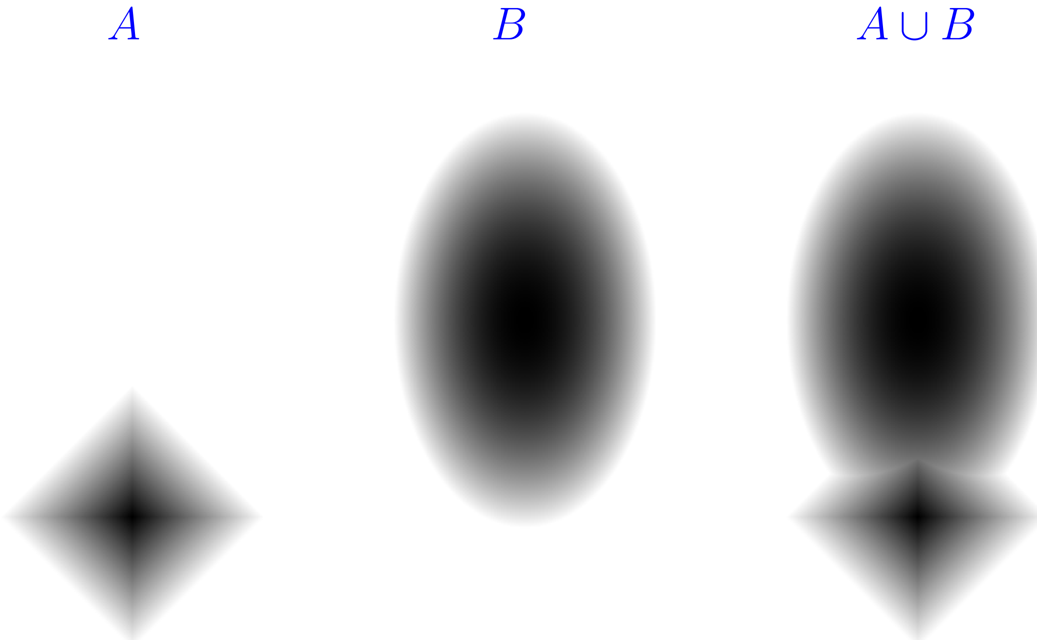
$$C := A \cap B \text{ mit } C(x) := \min\{A(x), B(x)\} \text{ für alle } x \in \mathcal{X}$$

den ***Durchschnitt*** von A und B,

$$C := A^c \text{ mit } C(x) := 1 - A(x) \text{ für alle } x \in \mathcal{X}$$

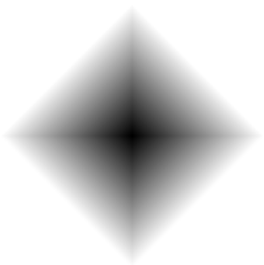
das ***Komplement*** von A. $\square$

Fuzzy Mengen: Vereinigung

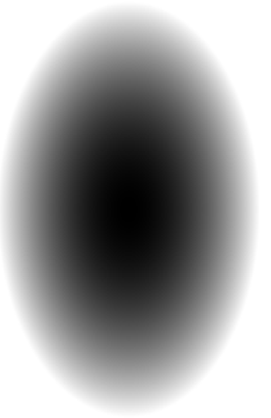


Fuzzy Mengen: Durchschnitt

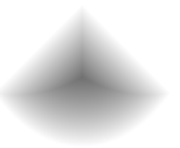
A



B

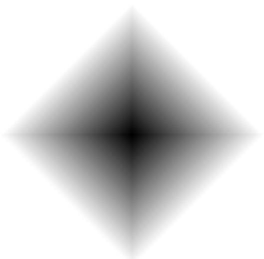


$A \cap B$

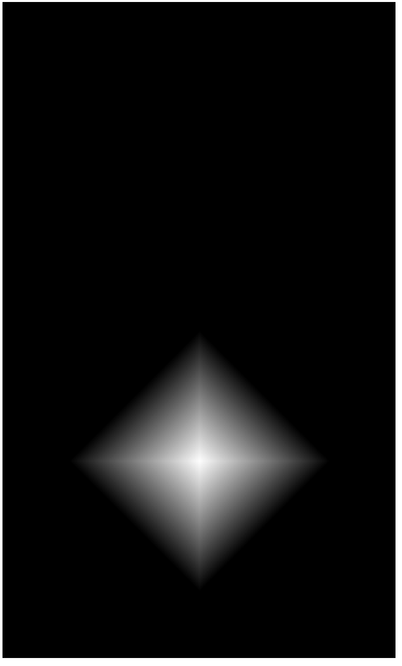


Fuzzy Mengen: Komplement

A



A^c



Fuzzy Mengen: Beziehungen zu scharfen Mengen (1)

Definition 1.5

Sei A eine Fuzzy-Menge über $\mathcal{X}$. Wir definieren:

(a)	***Träger***	$\mathrm{supp}(A)$	$:=$	$\{x \in \mathcal{X} \mid A(x) > 0\}$,
(b)	***Kern***	$\ker(A)$	$:=$	$\{x \in \mathcal{X} \mid A(x) = 1\}$,
(c)	***co-Kern***	$\mathrm{coker}(A)$	$:=$	$\{x \in \mathcal{X} \mid A(x) = 0\}$,
(d)	α-***Schnitt***	$A^{\geq \alpha}$	$:=$	$\{x \in \mathcal{X} \mid A(x) \geq \alpha\}$,
(e)	α-***Niveau***	$A^{= \alpha}$	$:=$	$\{x \in \mathcal{X} \mid A(x) = \alpha\}$

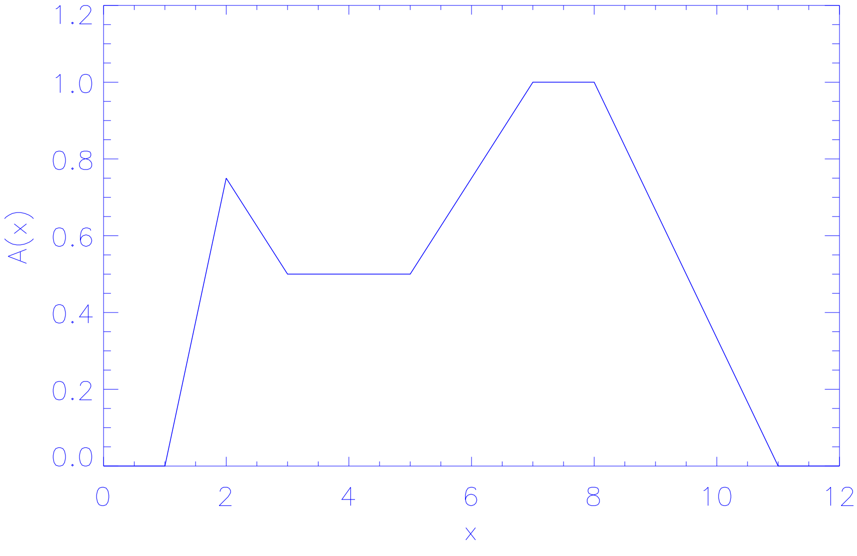
von A. $\square$

Offensichtlich:

$$\ker(A) = A^{=1} = A^{\geq 1} \text{ und } \mathrm{supp}(A) = A^{>0}.$$

Fuzzy Mengen: Beziehungen zu scharfen Mengen (2)

Beispiel:



Fuzzy Mengen: Beziehungen zu scharfen Mengen (3)

Satz 1.2

Für unscharfe Mengen A und B gilt:

(a) $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; \forall \alpha \in [0,1) : A^{>\alpha} \subseteq B^{>\alpha}$
$ \;\Leftrightarrow\; \forall \alpha \in (0,1] : A^{\geq\alpha} \subseteq B^{\geq\alpha}$

(b) $A = B \;\Leftrightarrow\; \forall \alpha \in [0,1) : A^{>\alpha} = B^{>\alpha}$
$ \;\Leftrightarrow\; \forall \alpha \in (0,1] : A^{\geq\alpha} = B^{\geq\alpha}$
$ \;\Leftrightarrow\; \forall \alpha \in (0,1] : A^{=\alpha} = B^{=\alpha}$

Beweis: (Übung) $\square$

Fuzzy Mengen: Höhe & Tiefe

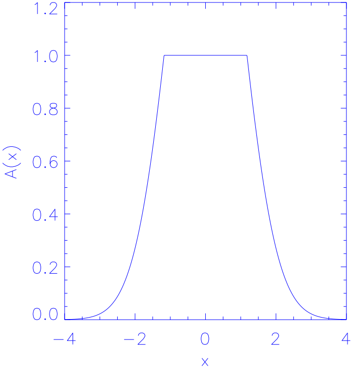
Definition 1.6

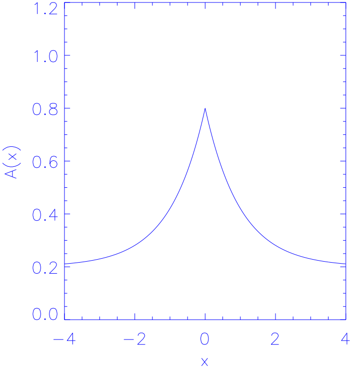
Sei A eine Fuzzy-Menge über $\mathcal{X}$. Wir definieren die

(a) ***Höhe*** $\mathrm{hgt}(A) := \sup\{A(x) \mid x \in \mathcal{X}\}$,

(b) ***Tiefe*** $\mathrm{dpth}(A) := \inf\{A(x) \mid x \in \mathcal{X}\}$

von A. $\square$





Fuzzy Mengen: Normalität (1)

Definition 1.7

Sei A eine Fuzzy-Menge über $\mathcal{X}$. Wir sagen:

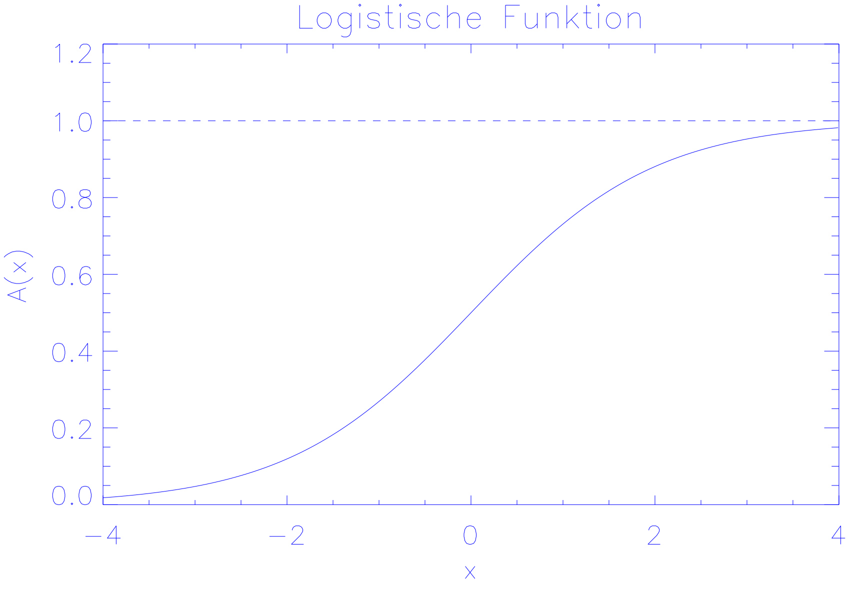
(a)	A ist ***normal***,	falls $\mathrm{hgt}(A) = 1$;
(b)	A ist ***co-normal***,	falls $\mathrm{dpth}(A) = 0$;
(c)	A ist ***subnormal***,	falls $\forall x \in \mathcal{X} : 0 < A(x) < 1$;
(d)	A ist ***stark normal***,	falls $\exists\, x \in \mathcal{X} : A(x) = 1$ und
(e)	A ist ***stark co-normal***,	falls $\exists\, x \in \mathcal{X} : A(x) = 0$. $\square$

Wie normalisiert man eine subnormale Fuzzy-Menge A?

$$\forall x \in \mathcal{X} : A^*(x) = \frac{A(x)}{\mathrm{hgt}(A)}$$

Fuzzy Mengen: Normalität (2)

Beispiel: (co-)normal, aber nicht stark (co-)normal



$$A(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Fuzzy Mengen: Kardinalität

Definition 1.8
Als ***Kardinalität*** der unscharfen Menge A bezeichen wir die Größe

$$\operatorname{card}(A) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in \mathcal{X}} A(x) & \text{, falls } \mathcal{X} \text{ endlich} \\ \displaystyle\int_{\mathcal{X}} A(x)\, dx & \text{, falls } \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$\square$

Operationen mit Fuzzy Mengen ($\cup$-Operationen)

Satz 1.3

Für unscharfe Mengen A, B und C und der $\cup$-Operation gilt:

- Kommutativität $\quad A \cup B = B \cup A$,
- Assoziativität $\quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
- Idempotenz $\quad A \cup A = A$,
- Monotonie $\quad A \subseteq B \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup C)$.

Beweis: (Rückführung auf Definitionen) $\square$

Operationen mit Fuzzy Mengen ($\cap$-Operationen)

Satz 1.4

Für unscharfe Mengen A, B und C und der $\cap$-Operation gilt:

- Kommutativität $A \cap B = B \cap A$,
- Assoziativität $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
- Idempotenz $A \cap A = A$,
- Monotonie $A \subseteq B \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$.

Beweis: (Rückführung auf Definitionen) $\square$

Operationen mit Fuzzy Mengen ($\cap$ und $\cup$)

Satz 1.5

Für unscharfe Mengen A, B & C gelten Distributivgesetze:

$$\text{(a) } A \cup (B \cap C) \;=\; (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\text{(b) } A \cap (B \cup C) \;=\; (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Beweis: Nur für (a)!

$$\text{Es gilt: } \max\{A, \min\{B, C\}\} = \begin{cases} \max\{A, B\}, & \text{falls } B \leq C \\ \max\{A, C\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Falls $B \leq C$ dann $\max\{A, B\} \leq \max\{A, C\}$ und umgekehrt.

Heraus kommt also immer der kleinere $\max$-Ausdruck und somit

$\max\{A, \min\{B, C\}\} = \min\{\max\{A, B\}, \max\{A, C\}\}$. $\square$

Fuzzy Mengen: Neutrales und Eins-Element

Satz 1.6

Für jede unscharfe Menge A gilt:

(a) $A \cup \mathbb{O} = A$

(b) $A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$

(c) $A \cap \mathbb{O} = \mathbb{O}$

(d) $A \cap \mathbb{U} = A$

Beweis:

(a) $\max\{A(x), 0\} = A(x)$.

(b) $\max\{A(x), 1\} = 1 = \mathbb{U}(x)$.

(c) $\min\{A(x), 0\} = 0 = \mathbb{O}(x)$.

(d) $\min\{A(x), 1\} = A(x)$. $\square$

Fuzzy Mengen ... wir rekapitulieren:

Bemerkung 1.2
Bis jetzt gezeigt:

Fuzzy-Mengen mit Operationen $\cap$ und $\cup$ sind ein *distributiver Verband* mit neutralem und Einselement.

Gilt zusätzlich:

$(A^c)^c = A$ und $A \cup A^c = \mathbb{U}$ sowie $A \cap A^c = \mathbb{O}$,
dann hätten wir es mit einer BOOLEschen Algebra zu tun!

Satz 1.7

Sei A eine unscharfe Menge. Es gilt:

(a) $(A^c)^c = A$.
(b) $\frac{1}{2} \leq (A \cup A^c)(x) < 1$ für $A(x) \in (0, 1)$.
(c) $0 < (A \cap A^c)(x) \leq \frac{1}{2}$ für $A(x) \in (0, 1)$.

Beweis:

(a) $1 - (1 - A(x)) = A(x)$.
(b) $\forall x : \max\{A(x), 1 - A(x)\} = \frac{1}{2} + \mid A(x) - \frac{1}{2} \mid \geq \frac{1}{2}$.
Wert 1 nur, falls $A(x) = 0$ oder $A(x) = 1$.
(c) $\forall x : \min\{A(x), 1 - A(x)\} = \frac{1}{2} - \mid A(x) - \frac{1}{2} \mid \leq \frac{1}{2}$.
Wert 0 nur, falls $A(x) = 0$ oder $A(x) = 1$. $\square$

Fuzzy Mengen vs. „tertium non datur“

Bemerkung 1.3
Im allgemeinen gilt also

$$A \cup A^c \neq \mathbb{U} \quad \text{sowie} \quad A \cap A^c \neq \mathbb{O}\,.$$

$\Rightarrow$ Kein „entweder/oder“!

$\Rightarrow$ Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten nicht gültig!

$\Rightarrow$ Gut, weil Unschärfe ja gerade erwünscht!

$\Rightarrow$ Keine BOOLEsche Algebra, aber trotzdem viel Struktur!

Operationen mit Fuzzy Mengen: De Morgan

Satz 1.8
Für unscharfe Mengen A und B gelten De Morgansche Gesetze:

(a) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
(b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Beweis: (Rückführung auf elementare Identitäten)

(a) $$\begin{aligned}(A \cap B)^c(x) &= 1 - \min\{A(x), B(x)\} \\ &\equiv \max\{1 - A(x), 1 - B(x)\} \\ &= (A^c \cup B^c)(x)\end{aligned}$$
(b) analog! $\square$