Wintersemester 2006/07

Einführung in die Informatik für Naturwissenschaftler und Ingenieure

(alias **Einführung in die Programmierung**)

(Vorlesung)

Prof. Dr. Günter Rudolph

Fachbereich Informatik

Lehrstuhl für Algorithm Engineering

Inhalt

- Rekursion: Technik
- Rekursion vs. Iteration

Definition (einfache, erste Version)

Rekursives Programm	:= Programm, das sich selbst aufruft
Rekursive Funktion	:= Funktion, die sich selbst aufruft

offensichtlich:

Es muss eine Abbruchbedingung geben …

gibt an, wann Programm / Funktion aufhören soll, sich selbst aufzurufen

⇒ sonst unendliche Rekusion

⇒ entspricht einer Endlosschleife

Arbeitsprinzip:

rekursiver Algorithmus löst Problem

durch Lösung mehrerer <u>kleinerer</u> Instanzen des <u>gleichen</u> Problems

⇒ Zerlegung des Problems in kleinere Probleme gleicher Art

Rekursionsprinzip schon lange bekannt (> 2000 Jahre)

- zunächst in der Mathematik (z. B. Euklid)
- führte in der Informatik zu fundamentalen Techniken beim Algorithmendesign
  - z.B. „teile und herrsche"-Methode (divide-and-conquer)
  - z.B. dynamisches Programmieren

Thematik inhaltsschwer für eigene 2- bis 4-stündige Vorlesung → hier: nur 1. Einstieg

Rekursion in der Mathematik

Beispiel: Fakultät

$f(0) = 1$	Rekursionsverankerung
$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = n * f(n-1)$	Rekursionsschritt

Beispiel: Rekursive Definition logischer Ausdrücke

1. Wenn v logische Variable (**`true`**, **`false`**), dann v und $\overline{v}$ logischer Ausdruck.
2. Wenn a und b logische Ausdrücke, dann a AND b sowie a OR b logische Ausdrücke.
3. Alle logischen Ausdrücke werden mit 1. und 2. aufgebaut.

Rekursion in der Informatik

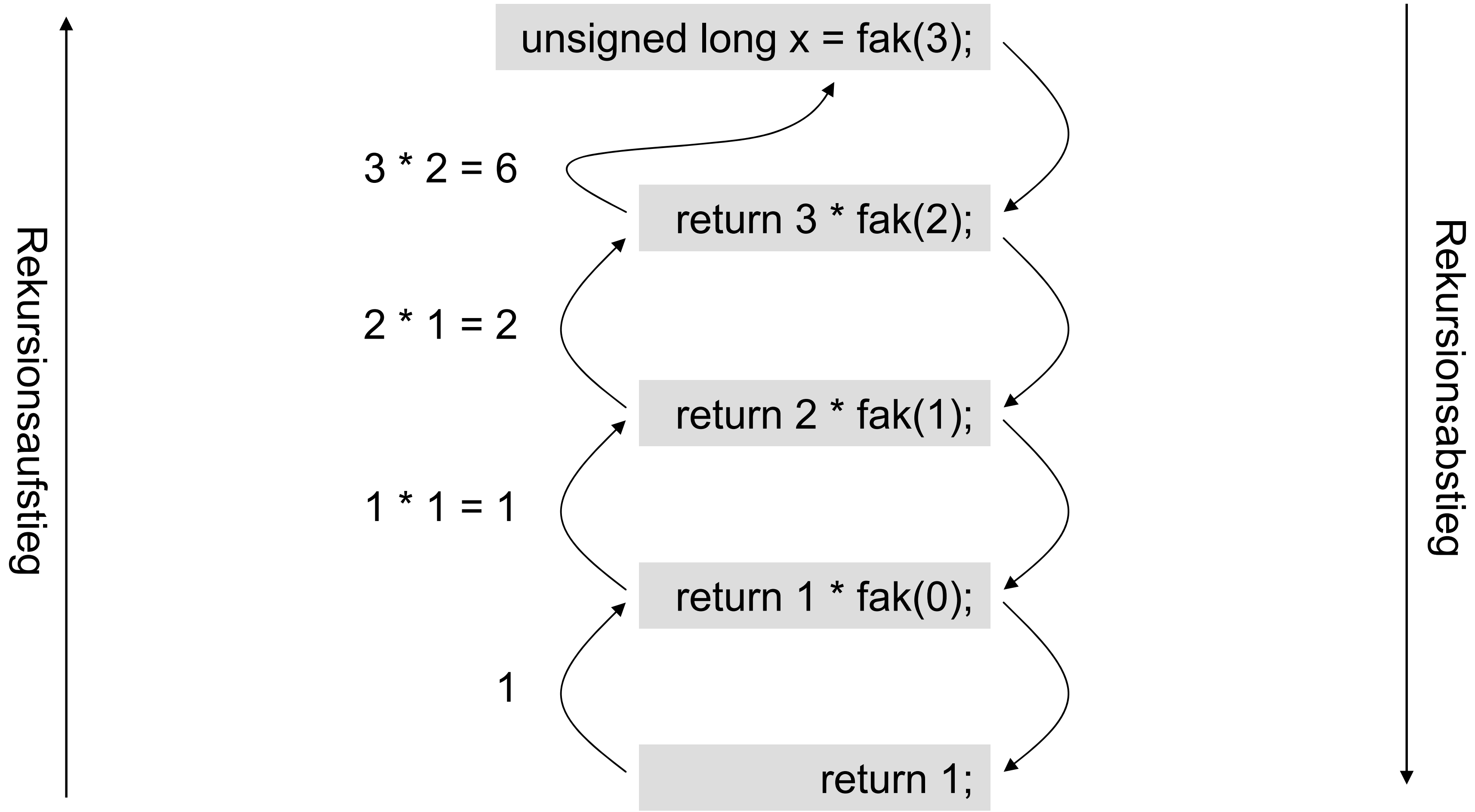
Beispiel: Fakultät

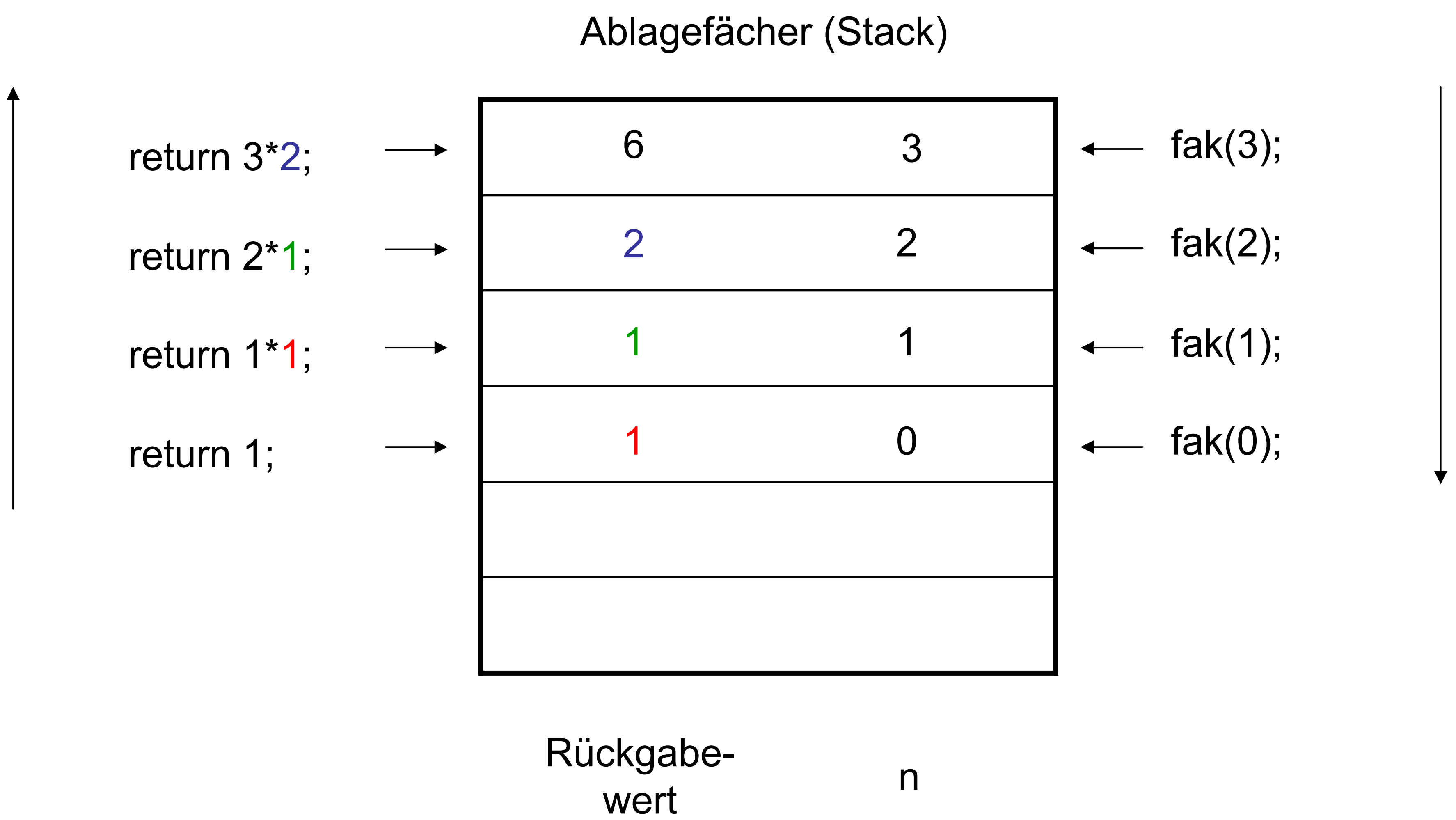
$f(0) = 1$ Rekursionsverankerung

$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = n * f(n - 1)$ Rekursionsschritt

```
unsigned long fak(unsigned int n) {
  if (n == 0) return 1;    // Rekursionsverankerung
  return n * fak(n - 1);   // Rekursionsschritt
}
```

$\Rightarrow$ Rekursionsverankerung verhindert endlose Rekursion!


unsigned long x = fak(3);
return 3 * fak(2);
return 2 * fak(1);
return 1 * fak(0);
return 1;
3 * 2 = 6
2 * 1 = 2
1 * 1 = 1
1
Rekursionsaufstieg
Rekursionsabstieg


Ablagefächer (Stack)
return 3*2;
return 2*1;
return 1*1;
return 1;
6
3
2
2
1
1
1
0
fak(3);
fak(2);
fak(1);
fak(0);
Rückgabe-
wert
n

```
unsigned long fak(unsigned int n) {
  if (n == 0) return 1;    // Rekursionsverankerung
  return n * fak(n - 1);   // Rekursionsschritt
}
```

Beobachtung:

1. Der Basisfall des Problems muss gelöst werden können (Rekursionsverankerung).
2. Bei jedem rekursiven Aufruf müssen kleinere Problemgrößen übergeben werden.

Weiteres Beispiel:

Bestimme den größten gemeinsamen Teiler (ggT) zweier Zahlen

⇒ Euklidischer Algorithmus (> 2000 Jahre)

in C++:

```
unsigned int ggT(unsigned int a, unsigned int b) {
  if (b == 0) return a;     // Rekursionsverankerung
  return ggT(b, a % b);     // Rekursionsschritt
}
```

Verkleinerung des Problems

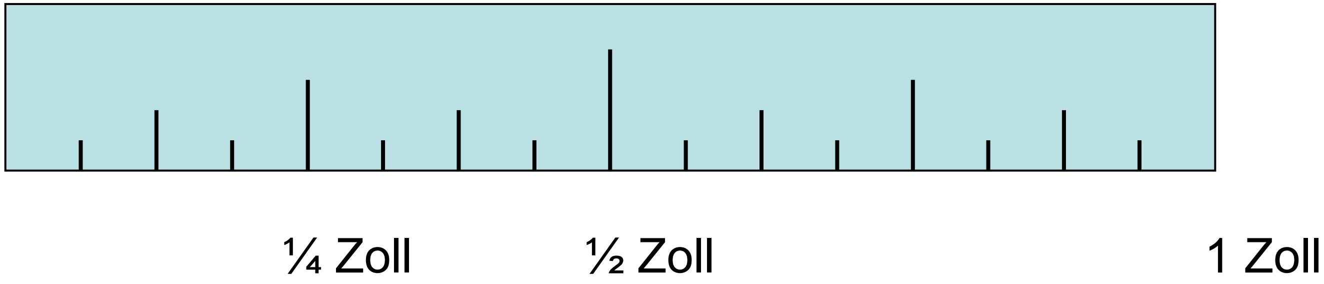
Ergebnis: **`16`**

ggT(123456, 131312)
ggT(131312, 123456)
ggT(123456, 7856)
ggT(7856, 5616)
ggT(5616, 2240)
ggT(2240, 1136)
ggT(1136, 1104)
ggT(1104, 32)
ggT(32, 16)
ggT(16, 0) → **`return 16`**

Abbruchbedingung!

Noch ein Beispiel:

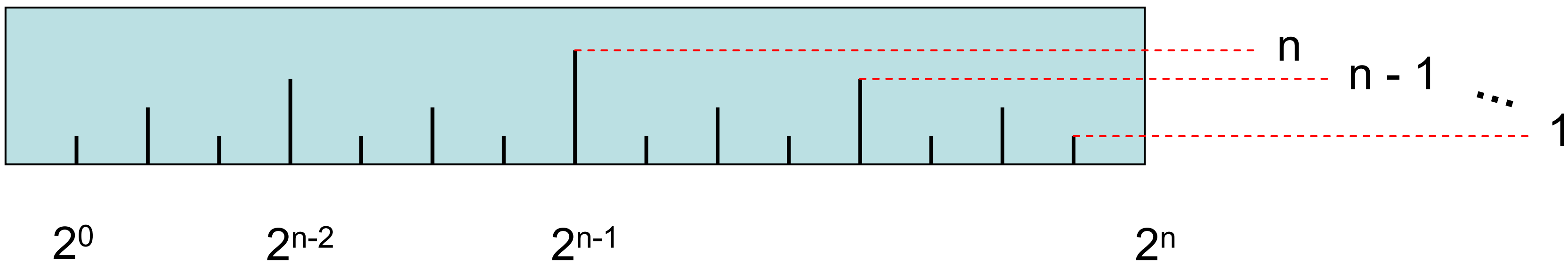
Zeichne Maßstriche auf ein (amerikanisches) Lineal



- Marke bei ½ Zoll
- kleinere Marke bei je ¼ Zoll
- noch kleinere Marke bei je 1/8 Zoll
- u.s.w. immer kleinere Marken bei je $1/2^n$

Annahme: Auflösung soll $1/2^n$ für gegebenes n sein

⇒ Maßstabsänderung:



Idee:

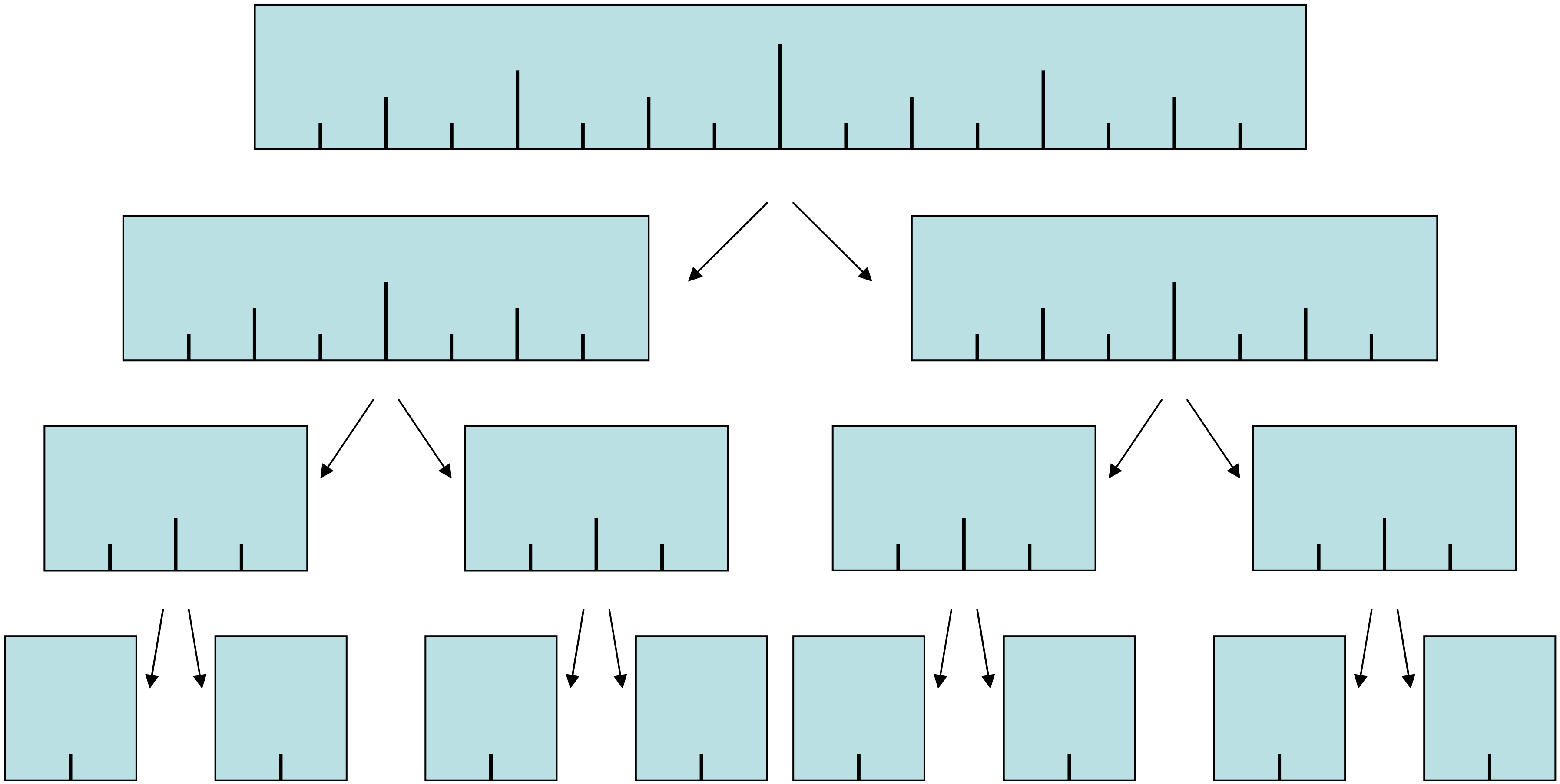
Teile Intervall in 2 gleich große Hälften,

zeichne linkes, halb so großes Lineal mit kürzerer Marke ← rekursiv!

erzeuge längere Marke in der Mitte

zeichne rechtes, halb so großes Lineal mit kürzerer Marke ← rekursiv!

Illustration:



Also:

Zeichnen des Lineals wird so lange auf kleinere Probleme / Lineale vereinfacht,

bis wir das elementare Problem / Lineal lösen können:

„Zeichne eine Marke der Höhe 1“

Jetzt: Rekusionsaufstieg

linkes (elementares) Lineal zeichnen ☑

zeichne Marke der Höhe h (= 2) ☑

rechtes (elementares) Lineal zeichnen ☑

$\Rightarrow$ Teilproblem gelöst!

Implementierung

<u>Welche Parameter spielen eine Rolle?</u>

linker Rand des Teil-Lineals → **li**

rechter Rand des Teil-Lineals → **re**

Höhe der Marke → **h**

Mitte des Teil-Lineals (für die Marke) → **mi**

```
void Lineal(unsigned int li,unsigned int re,unsigned int h) {

  unsigned int mi = (li + re) / 2;
  if (h > 0) {
    Lineal(li, mi, h - 1);
    Marke(mi, h);
    Lineal(mi, re, h - 1);
  }

}
```

Implementierung

Zeichnen der Marken (mehrere Möglichkeiten)

hier: wir wissen, dass Marken von links nach rechts gezeichnet werden

⇒ Testausgabe mit senkrechtem Lineal (Marken von oben nach unten)

```
void Marke(unsigned int position, unsigned int hoehe) {

  while (hoehe--) cout << '-';
  cout << endl;

}
```

Anmerkung:

`position` wird hier nicht gebraucht, aber andere Situationen vorstellbar

Implementierung

Hauptprogramm zum Testen

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main(int argc, char *argv[]) {
  if (argc != 2) {
    cerr << "usage: " << argv[0] << ": n" << endl;
    return 1;
  }
  unsigned int n = atoi(argv[1]);
  Lineal(0, 1 << n, n);
  return 0;
}
```

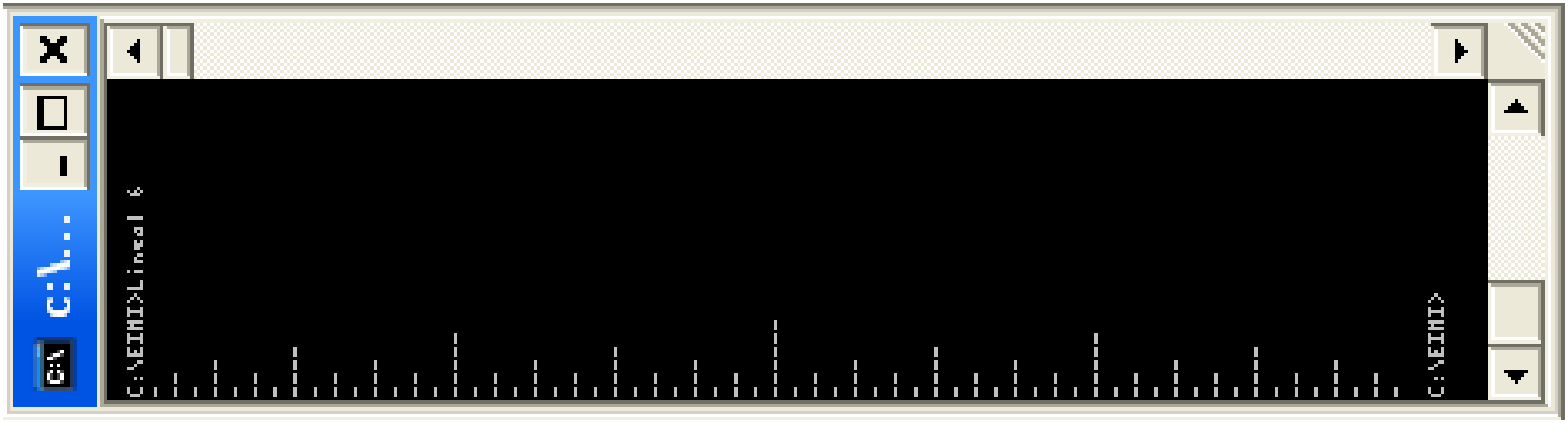
`<<` im numerischen Ausdruck: **`x << n`**
schiebt Bitmuster von **`x`** um **`n`** Bits nach links.

Was bedeutet **`x >> n`** ?

```
c:\windows\System32\cmd.exe

C:\EINI>Lineal 1
-

C:\EINI>Lineal 2
-
--
-

C:\EINI>Lineal 3
-
--
-
---
-
--
-

C:\EINI>Lineal 4
-
--
-
---
-
--
-
----
-
--
-
---
-
--
-

C:\EINI>_
```

```
c:\windows\System32\cmd.exe

C:\EINI>Lineal 5
-
--
-
---
-
--
-
----
-
--
-
---
-
--
-
-----
-
--
-
---
-
--
-
----
-
--
-
---
-
--
-

C:\EINI>
```

Lineal mit $2^6 = 64$ Marken:



Rekusion vs. Iteration

Theorem:

Jeder iterative Algorithmus lässt sich rekursiv formulieren und umgekehrt!

<u>Wofür also das alles?</u>

⇒ Manche Probleme lassen sich mit Rekursion sehr <u>elegant</u> + <u>einfach</u> lösen.

⇒ Lösung durch Iteration kann komplizierter sein!

<u>Andererseits:</u>

⇒ Nicht jedes Problem lässt sich durch Rekursion effizient lösen!

⇒ Iterative Lösung kann viel effizienter (auch einfacher) sein.

Rekusion vs. Iteration

beide einfach,
aber nicht gleich effizient

Iterative Lösung zur Fakultät:

```
unsigned long fak(unsigned int n) {

  unsigned int wert = 1;
  while (n > 0) wert *= n--;
  return wert;

}
```

1 Funktionsaufruf

1 x 2 Ablagefächer

1 lokale Variable

Rekursive Lösung zur Fakultät:

```
unsigned long fak(unsigned int n) {

  if (n == 0) return 1;
  return n * fak(n – 1);

}
```

n Funktionsaufrufe

n x 2 Ablagefächer

0 lokale Variable

Rekusion vs. Iteration

```
void Lineal(unsigned int li,unsigned int re,unsigned int h) {

  for (int t = 1, j = 1; t <= h; j += j, t++)
    for (int i = 0; li + j + i <= re; i += j + j)
      Marke(li + j + i, t);
}
```

Zeichnet erst alle Marken der Höhe 1, dann 2, usw. mit Auslassungen

```
void Lineal(unsigned int li,unsigned int re,unsigned int h) {

  unsigned int mi = (li + re) / 2;
  if (h > 0) {
    Lineal(li, mi, h - 1);
    Marke(mi, h);
    Lineal(mi, re, h - 1);
  }

}
```

Rekusion vs. Iteration

Zur einfachen Übertragung rekursiver Algorithmen

in iterative äquivalente Form benötigen wir spezielle Datenstrukturen (`stack`).

Diese und einige andere werden im nächsten Kapitel eingeführt.

$\Rightarrow$ **Abstrakte Datentypen**