

Einführung in die Programmierung

Wintersemester 2010/11

Prof. Dr. Günter Rudolph
 Lehrstuhl für Algorithm Engineering
 Fakultät für Informatik
 TU Dortmund

Inhalt

- Definition: Abstrakter Datentyp (ADT)
- ADT Stapel
- ADT Schlange
- ADT Liste
- ADT Binärer Suchbaum
- ADT Graph
- Exkurse:
 - Einfache Dateibehandlung
 - C++ Strings

Definition:

Abstrakter Datentyp (ADT) ist ein Tripel (T, F, A), wobei

- T eine nicht leere Menge von Datenobjekten
- F eine Menge von Operationen,
- A eine nicht leere Menge von Axiomen, die die Bedeutung der Operationen erklären. ■

Abstrakt?

- Datenobjekte brauchen keine konkrete Darstellung (Verallgemeinerung).
- Die Wirkung der Operationen wird beschrieben, nicht deren algorithmische Ausprägung.
 → „**WAS, nicht WIE!**“

Beispiel: ADT bool

F: Operationen

true	:		→ bool	}	Festlegung, welche Methoden es gibt
false	:		→ bool		
not	:	bool	→ bool		
and	:	bool x bool	→ bool		
or	:	bool x bool	→ bool		

A: Axiome

not(false)	=	true	}	Festlegung, was die Methoden bewirken
not(true)	=	false		
and(false, false)	=	false		
and(false, true)	=	false		
and(true, false)	=	false		
and(true, true)	=	true		
or(x, y)	=	not(and(not(x), not(y)))		

Eigenschaften

- Wenn man ADT kennt, dann kann man ihn überall verwenden.
- Implementierung der Funktionen für Benutzer nicht von Bedeutung.
- Trennung von Spezifikation und Implementierung.
- Ermöglicht späteren Austausch der Implementierung, ohne dass sich der Ablauf anderer Programme, die ihn benutzen, ändert!

Nur Operationen geben Zugriff auf Daten!

→ Stichwort: Information Hiding!

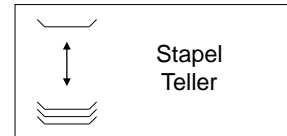
Lineare Datenstrukturen: Keller bzw. Stapel (engl. *stack*)

```
create :           → Stapel
push  : Stapel x T → Stapel
pop   : Stapel     → Stapel
top   : Stapel     → T
empty : Stapel     → bool
```

```
empty(create) = true
empty(push(k, x)) = false
pop(push(k, x)) = k
top(push(k, x)) = x
```

Aufräumen:
Kiste in Keller,
oben auf Haufen.

Etwas aus Keller holen:
Zuerst Kiste, weil oben
auf Haufen.



LIFO:
Last in, first out.

Klassendefinition: (Version 1)

```
typedef int T;

class Stapel {
public:
    Stapel();           // Konstruktor
    void push(T &x);   // Element auf den Stapel legen
    void pop();        // oberstes Element entfernen
    T top();           // oberstes Element ansehen
    bool empty();     // Stapel leer?
private:
    static unsigned int const maxSize = 100;
    int sz;            // Stapelzeiger
    T data[maxSize]; // Speichervorrat für Nutzdaten
};
```

Implementierung: (Version 1)

```
Stapel::Stapel() {
    sz = -1;
}
```

```
void Stapel::push(T &x) {
    data[++sz] = x;
}
void Stapel::pop() {
    sz--;
}
T Stapel::top() {
    return data[sz];
}
bool Stapel::empty() {
    return (sz == -1);
}
```

Idee:
unzulässiger Arrayindex
kennzeichnet leeren Stapel

Probleme:
Arraygrenzen!

Wann können Probleme auftreten?

Bei `pop`, falls Stapel leer ist:

→ Stackpointer wird `-2`, anschließendes `push` versucht auf `data[-1]` zu schreiben

Bei `top`, falls Stapel leer ist:

→ es wird undefinierter Wert von `data[-1]` zurückgegeben

Bei `push`, falls Stapel voll ist:

→ es wird versucht auf `data[maxSize]` zu schreiben

⇒ diese Fälle müssen abgefangen werden! **Fehlermeldung!**

```
void error(char *info) {
    cerr << info << endl;
    exit(1);
}
```

gibt Fehlermeldung `info` aus und bricht das Programm durch `exit(1)` **sofort** ab und liefert den Wert des Arguments (hier: 1) an das Betriebssystem zurück

Klassendefinition: (Version 2; Ergänzungen in **rot**)

```
typedef int T;

class Stapel {
public:
    Stapel();           // Konstruktor
    void push(T &x);   // Element auf den Stapel legen
    void pop();        // oberstes Element entfernen
    T top();           // oberstes Element ansehen
    bool empty();      // Stapel leer?
    bool full();       // Stapel voll?
private:
    static unsigned int const maxSize = 100;
    int sz;            // Stapelzeiger
    T data[maxSize];  // Speichervorart für Nutzdaten
    void error(char *info); // Fehlermeldung + Abbruch
};
```

Implementierung: (Version 2, Änderungen und Zusätze in **rot**)

```
Stapel::Stapel() {
    sz = -1;
}

void Stapel::push(T &x) {
    if (full()) error("voll");
    data[++sz] = x;
}

void Stapel::pop() {
    if (empty()) error("leer");
    sz--;
}
```

```
T Stapel::top() {
    if (empty()) error("leer");
    return data[sz];
}

bool Stapel::empty() {
    return (sz == -1);
}

bool Stapel::full() {
    return (sz == maxSize - 1);
}
```

```
void Stapel::error(char* info) {
    cerr << info << endl;
    exit(1);
}
```

← private Methode:
kann nur innerhalb der Klasse
aufgerufen werden!

Erster Test ...

```
#include <iostream>
#include "Stapel.h"
using namespace std;

int main() {
    Stapel s;
    for (int i = 0; i < 100; i++) s.push(i);
    cout << s.top() << endl;
    for (int i = 0; i < 90; i++) s.pop();
    while (!s.empty()) {
        cout << s.top() << endl;
        s.pop();
    }
    return 0;
}
```

Ausgabe:

```
99
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
```

Lineare Datenstrukturen: Schlange (engl. *queue*)

FIFO:
First in, first out.

create : → Schlange
 enq : Schlange x T → Schlange
 deq : Schlange → Schlange
 front : Schlange → T
 empty : Schlange → bool

Schlange an der Supermarktkasse:
 Wenn Einkauf fertig, dann **hinten** anstellen. Der nächste Kunde an der Kasse steht ganz **vorne** in der Schlange.

empty(create) = true
 empty(enq(s, x)) = false
 deq(enq(s, x)) = empty(s) ? s : enq(deq(s), x)
 front(enq(s, x)) = empty(s) ? x : front(s)

Eingehende Aufträge werden „geparkt“, und dann nach und nach in der Reihenfolge des Eingangs abgearbeitet.

Klassendefinition: (Version 1; schon mit Fehlerbehandlung)

```
typedef int T;

class Schlange {
public:
    Schlange();           // Konstruktor
    void enq(T &x);       // Element anhängen
    void deq();           // erstes Element entfernen
    T front();            // erstes Element ansehen
    bool empty();         // Schlange leer?
    bool full();          // Schlange voll?
private:
    static unsigned int const maxSize = 100;
    int ez;               // Endezeiger
    T data[maxSize];      // Array für Nutzdaten
    void error(char *info); // Fehlermeldung
};
```

Implementierung: (Version 1; Fehler bei Arraygrenzen werden abgefangen)

```
Schlange::Schlange():ez(-1) {
}
T Schlange::front() {
    if (empty()) error("leer");
    return data[0];
}
bool Schlange::empty() {
    return (ez == -1);
}
bool Schlange::full() {
    return (ez == maxSize - 1);
}

void Schlange::enq(T &x) {
    if (full()) error("voll");
    data[++ez] = x;
}

void Schlange::deq() {
    if (empty()) error("leer");
    for (int i = 0; i < ez; i++)
        data[i] = data[i+1];
    ez--;
}
```

```
void Schlange::error(char *info) {
    cerr << info << endl;
    exit(1);
}
```

← private Methode:
kann nur innerhalb der Klasse
aufgerufen werden!

Erster Test ...

```
#include <iostream>
#include "Schlange.h"
using namespace std;

int main() {
    Schlange s;

    for (int i = 0; i < 100; i++) s.enq(i);
    cout << s.front() << endl;
    for (int i = 0; i < 90; i++) s.deq();
    while (!s.empty()) {
        cout << s.front() << endl;
        s.deq();
    }
    return 0;
}
```

Ausgabe: 0
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99

Benutzer des (abstrakten) Datentyps `Schlange` wird feststellen, dass

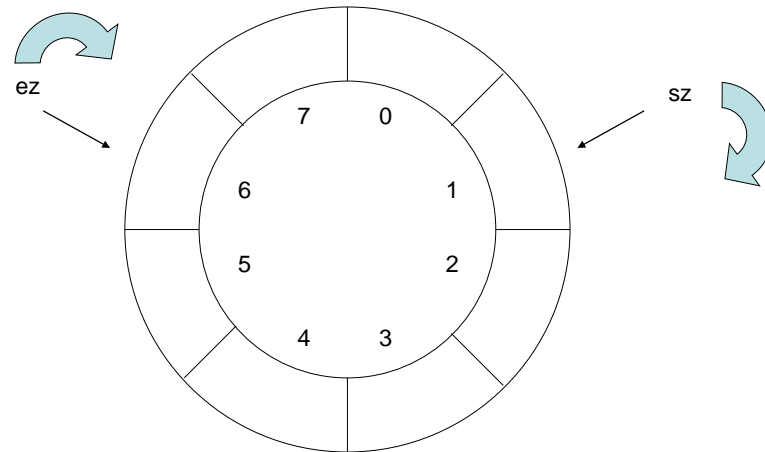
1. fast alle Operationen schnell sind, aber
2. die Operation `deq` vergleichsweise langsam ist.

Laufzeit / Effizienz der Operation `deq`

```
void Schlange::deq() {
    if (empty()) error("leer");
    for (int i = 0; i < ez; i++)
        data[i] = data[i+1];
    ez--;
}
```

`ez` = Anzahl Elemente in Schlange
`ez` viele Datenverschiebungen
 Worst case: $(\text{maxSize} - 1)$ mal

Idee: Array zum Kreis machen; zusätzlich Anfang/Start markieren (`sz`)



Implementierung: (Version 2; mit Ringspeicher)

```
typedef int T;

class Schlange {
public:
    Schlange();
    void enq(T &x);
    void deq();
    T front();
    bool empty();
    bool full();
private:
    static unsigned int const maxSize = 100;
    int ez; // Endezeiger
    int sz; // Startzeiger
    T data[maxSize];
    void error(char *info);
};
```

Implementierung: (Version 2; mit Ringspeicher)

```
Schlange::Schlange() {
    sz = 0;
    ez = -1;
}
T Schlange::front() {
    if (empty()) error("leer");
    return data[sz];
}
bool Schlange::empty() {
    return (ez == -1);
}
bool Schlange::full() {
    if (empty()) return false;
    return ((ez + 1) % maxSize) == sz;
}
```

Implementierung: (Version 2; mit Ringspeicher)

```
void Schlange::enq(T &x) {
    if (full(s)) error("full");
    ez = (ez + 1) % maxSize;
    data[ez] = x;
}
```

Laufzeit:
unabhängig von Größe
der Schlange

```
void Schlange::deq() {
    if (empty(s)) error("leer");
    if (sz == ez) { sz = 0; ez = -1; }
    else sz = (sz + 1) % maxSize;
}
```

Laufzeit:
unabhängig von Größe
der Schlange

Unbefriedigend bei der Implementierung:

Maximale festgelegte Größe des Stapels bzw. der Schlange!

→ Liegt an der unterliegenden Datenstruktur Array:

Array ist **statisch**, d.h.

Größe wird zur Übersetzungszeit **festgelegt**
und ist **während** der **Laufzeit** des Programms **nicht veränderbar!**

Schön wären **dynamische** Datenstrukturen, d.h.

Größe wird zur Übersetzungszeit **nicht festgelegt**
und ist **während** der **Laufzeit** des Programms **veränderbar!**

⇒ **Dynamischer Speicher!** (Stichwort: `new / delete`)

Lineare Datenstrukturen: Schlange (engl. *queue*)

create : → Schlange
enq : Schlange x T → Schlange
deq : Schlange → Schlange
front : Schlange → T
empty : Schlange → bool

create : erzeugt leere Schlange
enq : hängt Element ans Ende der Schlange
deq : entfernt Kopf der Schlange
front : gibt im Kopf der Schlange gespeichertes Element zurück
empty : prüft, ob Schlange leer ist

→ Implementierung mit statischen Speicher ersetzen durch dynamischen Speicher

Bauplan:

Datentyp *Variable = new Datentyp; (Erzeugen)
delete Variable; (Löschen)

Bauplan für Arrays:

Datentyp *Variable = new Datentyp[Anzahl]; (Erzeugen)
delete[] Variable; (Löschen)

Achtung:

Dynamisch erzeugte Objekte müssen auch wieder gelöscht werden!
Keine automatische Speicherbereinigung!

Vorüberlegungen für ADT Schlange mit dynamischen Speicher:

Wir können bei der Realisierung der Schlange statt statischen (Array) nun dynamischen Speicher verwenden ...

Ansatz: `new int[oldsize+1]` ... bringt uns das weiter?

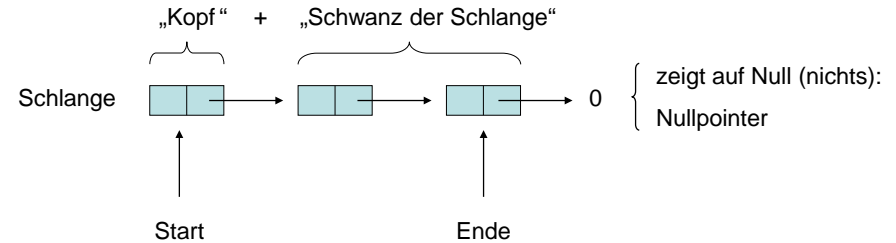
→ Größe kann zwar zur Laufzeit angegeben werden, ist aber dann fixiert!

Falls maximale Größe erreicht, könnte man

1. größeres Array anlegen
 2. Arraywerte ins größere Array **kopieren** und
 3. kleineres Array löschen.
- } **ineffizient!**

Vorüberlegungen für ADT Schlange mit dynamischen Speicher:

Objekt Datenfeld Zeiger



Klassendefinition: (Version 3; mit dynamischem Speicher)

```
typedef int T;

class Schlange {
public:
    Schlange();           // Konstruktor
    void enq(T &x);
    void deq();
    T front();
    bool empty();
    void clear();        // löscht alle Einträge
    ~Schlange();        // Destruktor
private:
    struct Objekt {      // interner Datentyp
        Objekt *tail;   // Zeiger auf Schlangenschwanz
        T data;         // Datenfeld
    } *sz, *ez;         // Zeiger auf Start + Ende
    void error(char *info); // Hilfsmethode: Fehlermeldung
};
```

Implementierung: (Version 3)

```
Schlange::Schlange() {
    ez = NULL;
}
T Schlange::front() {
    if (empty()) error("leer");
    return sz->data;
}
bool Schlange::empty() {
    return (ez == NULL);
}
void Schlange::clear() {
    while (!empty()) deq();
}
void Schlange::error(char *info) {
    cerr << info << endl;
    exit(1);
}
```

NULL ist der Nullzeiger!

```
Schlange::~Schlange() {
    clear();
}
```

Implementierung: (Version 3)

```

void Schlange::enq(T &x) {
    Objekt *obj = new Objekt;           // neues Objekt anlegen
    obj->data = x;                        // Nutzdaten speichern
    obj->tail = NULL;
    if (empty()) sz = obj;               // falls leer nach vorne,
    else ez->tail = obj;                 // sonst hinten anhängen
    ez = obj;                            // Endezeiger aktualisieren
}

void Schlange::deq() {
    if (empty()) error("leer");
    Objekt *obj = sz;                   // Zeiger auf Kopf retten
    sz = sz->tail;                       // Start auf 2. Element
    if (sz == NULL) ez = NULL;          // Schlange leer!
    delete obj;                          // ehemaliges 1. Element
                                        // löschen
}

```

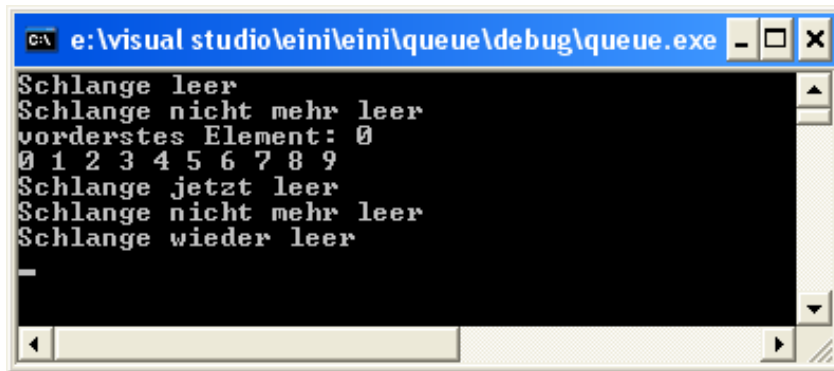
```

int main() {
    Schlange s;
    if (s.empty()) cout << "Schlange leer" << endl;
    for (int i = 0; i < 10; i++) s.enq(i);
    if (!s.empty()) cout << "Schlange nicht mehr leer" << endl;
    cout << "vorderstes Element: " << s.front() << endl;
    while (!s.empty()) {
        cout << s.front() << " ";
        s.deq();
    }
    cout << endl;
    if (s.empty()) cout << "Schlange jetzt leer" << endl;

    for (i = 0; i < 100; i++) s.enq(i);
    if (!s.empty()) cout << "Schlange nicht mehr leer" << endl;
    s.clear();
    if (s.empty()) cout << "Schlange wieder leer" << endl;
    return 0;
}

```

Testprogramm!



```

C:\e:\visual studio\queue\debug\queue.exe
Schlange leer
Schlange nicht mehr leer
vorderstes Element: 0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Schlange jetzt leer
Schlange nicht mehr leer
Schlange wieder leer

```

Kopieren von Klassenobjekten

```

class Schlange {
    T data[100];
    int sz, ez;
};

```

```

Schlange s1;
for (int i=0;i<10;i++)
    s1.enq(i);
Schlange s2 = s1;

```

statischer Speicher:
bytweweises
Speicherabbild!
⇒ OK!

```

class Schlange {
    struct Objekt {
        Objekt *tail;
        T data;
    } *sz, *ez;
};

```

```

Schlange s1;
for (int i=0;i<10;i++)
    s1.enq(i);
Schlange s2 = s1;

```

dynam. Speicher:
bytweweises
Speicherabbild!
⇒ Problem!

Es werden nur die Inhalte der Zeiger kopiert!

Bei Verwendung von dynamischem Speicher muss auch dieser kopiert werden!

⇒ In C++ kann das durch den [Kopierkonstruktor](#) realisiert werden!

Kopierkonstruktor (copy constructor)

Wird für eine Klasse **kein** Kopierkonstruktor implementiert, dann erzeugt ihn der Compiler **automatisch!**

Achtung!

Es wird dann ein **byteweises Speicherabbild** des Objektes geliefert!

⇒ „flache Kopie“ (engl. *shallow copy*)

Problem:

- Konstruktor fordert dynamischen Speicher an → nur Kopie des Zeigers
- Konstruktor öffnet exklusive Datei (o.a. Resource) → nicht teilbar! Crash!

⇒ dann „tiefe Kopie“ (engl. *deep copy*) nötig!

⇒ man **muss** Kopierkonstruktor (und Destruktor) implementieren!

```
#include <iostream>
#include "Stapel.h" // statischer Speicher
#include "Schlange.h" // dynamischer Speicher
using namespace std;
int main() {
    Stapel stack1;
    Schlange queue1;
    for (int i = 0; i < 10; i++) {
        stack1.push(i);
        queue1.enq(i);
    }
    Stapel stack2 = stack1;
    Schlange queue2 = queue1;
    while (!stack1.empty()) stack1.pop();
    while (!queue1.empty()) queue1.deq();
    while (!stack2.empty()) {
        cout << stack2.top() << endl;
        stack2.pop();
    }
    while (!queue2.empty()) {
        cout << queue2.front() << endl;
        queue2.deq();
    }
    return 0;
}
```

Programmiertes Unheil:

Stapel1 / Schlange1 mit Daten belegen.

Stapel1 / Schlange1 kopieren

Stapel1 / Schlange1 löschen

kopierten Stapel ausgeben

kopierte Schlange ausgeben ...



crash!

Kopierkonstruktor (copy constructor)

```
class Schlange {
public:
    Schlange(); // Konstruktor
    Schlange(const Schlange & s); // Kopierkonstruktor
    ~Schlange(); // Destruktor
};
```

Kann wie eine Zuweisung interpretiert werden!

Kopierkonstruktor

```
Schlange::Schlange(const Schlange& s){
    ez = NULL;
    Objekt *ptr = s.sz;
    while (ptr != NULL) {
        enq(ptr->data);
        ptr = ptr->tail;
    }
}
```

Entstehendes Objekt wird mit einem bestehenden Objekt initialisiert!

Kopierkonstruktor (copy constructor)**Bauplan:**

ObjektTyp (const ObjektTyp & bezeichner);

→ Kopierkonstruktor liefert / soll liefern byteweises Speicherabbild des Objektes

Wird **automatisch** aufgerufen, wenn:

1. ein neues Objekt erzeugt und mit einem bestehenden initialisiert wird;
2. ein Objekt per Wertübergabe an eine Funktion gereicht wird;
3. ein Objekt mit **return** als Wert zurückgegeben wird.

Punkt a(1.2, 3.4); // Neu

Punkt b(a); // **Kopie:** direkter Aufruf des Kopierkonstruktors

Punkt c = b; // **Kopie:** bewirkt Aufruf des Kopierkonstruktors

b = a; // **Zuweisung! Keine Kopie!** → **gleiche Problematik!**

Wenn für eine Klasse der Zuweisungsoperator **nicht** überschrieben wird, dann macht das der Compiler **automatisch!**

Vorsicht!

Speicher des Objektes wird **byteweise** überschrieben!

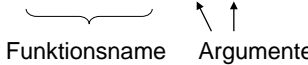
Problem:

z.B. wenn Objekt dynamischen Speicher verwendet
⇒ gleiche Problematik wie beim Kopierkonstruktor

Merke:

Wenn die Implementierung eines **Kopierkonstruktors** nötig ist, dann höchstwahrscheinlich auch **Destruktor** und überschriebene **Zuweisung!**

Überladen von Operatoren

- Operator ist eine Verknüpfungsvorschrift!
- Kann man auffassen als Name einer Funktion:
Bsp: Addition $a + b$ interpretieren als $+(a, b)$
- in C++ als: $c = \text{operator+}(a, b)$


Zweck:

eine Klasse mit Funktionalität ausstatten, die vergleichbar mit elementarem Datentyp ist!

insbesondere bei **Zuweisung und Gleichheit**

Vorteil:

Quellcode wird übersichtlicher

Überladen von Operatoren**Welche?**

+	^	==	+=	^=	!=	<<	()
-	&	>	--	&=	&&	<<=	new
*		>=	*=	=		>>	delete
/	~	<	/=	++	->	>>=	=
%	!	<=	%=	--	->*	[]	

Wie?

Objektyp& operator@(const ObjektTyp& bezeichner)

Objektyp operator@(const ObjektTyp& bezeichner)

Überladen von Operatoren

```
Schlange& operator=(const Schlange& s) {
    clear(); // Speicher freigeben
    Objekt *ptr = s.sz;
    while (ptr != NULL) {
        enq(ptr->data);
        ptr = ptr->tail;
    }
    return *this;
}
```

Zuweisung

this ist ein Zeiger auf das Objekt selbst!

bei der Zuweisung wird ja keine neue Instanz erzeugt; tatsächlich wird vorhandene Instanz verändert;

deshalb ist Rückgabewert eine Referenz auf sich selbst!

Überladen von Operatoren

```
bool operator== (const Schlange& s) {
    Objekt *ptr1 = sz; // this->sz
    Objekt *ptr2 = s.sz;
    while (ptr1 != NULL && ptr2 != NULL) {
        if (ptr1->data != ptr2->data) return false;
        ptr1 = ptr1->tail;
        ptr2 = ptr2->tail;
    }
    return (ptr1 == ptr2);
}
```

Test auf Gleichheit

Zwei Schlangen sind gleich genau dann, wenn sie

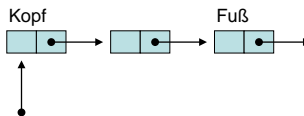
1. gleich viele Elemente haben und
2. die Inhalte in gleicher Reihenfolge paarweise gleich sind.

Unterschied zwischen Kopierkonstruktor und Zuweisung

Kopierkonstruktor:Initialisierung einer **neu** deklarierten Variable von **existierender** VariableZuweisung:

- wirkt zwar wie Kopierkonstruktor (flache Kopie bzw. tiefe Kopie), überschreibt jedoch Speicher der **existierenden** Variable mit dem Speicher der zuweisenden, **existierenden** Variable
- zusätzlich ggf. Aufräumen: Freigabe dynamischer Speicher!
- außerdem: Rückgabe einer Referenz auf sich selbst

ADT Liste (1. Version)

Liste wird nur durch einen Zeiger auf ihren Listenkopf repräsentiert

Operationen:

```
create   :           → Liste
empty   : Liste     → bool
append  : T x Liste → Liste
prepend : T x Liste → Liste
clear   :           → Liste
is_elem : T x Liste → bool
```

hängt am Ende an vor Kopf einfügen

ist Element enthalten?

ADT Liste (1. Version)

```
typedef int T;

class Liste {
public:
    Liste(); // Konstruktor
    Liste(const Liste& liste); // Kopierkonstruktor
    void append(const T& x); // hängt hinten an
    void prepend(const T& x); // fügt vorne ein
    bool empty(); // Liste leer?
    bool is_elem(const T& x); // ist Element x in Liste?
    void clear(); // Liste leeren
    ~Liste(); // Destruktor
private:
    struct Objekt { // privater Datentyp
        T data; // Nutzdaten
        Objekt *next; // Zeiger auf nächstes Objekt
    } *sz; // Startzeiger auf Listenkopf
    void clear(Objekt *obj); // Hilfsmethode zum Leeren
};
```

ADT Liste (1. Version)

```
Liste::Liste() {
    sz = NULL;
}
```

```
void Liste::clear(Object *obj) {
    if (obj == NULL) return;
    clear(obj->next);
    delete obj;
}
```

```
void Liste::clear() {
    clear(sz);
    sz = NULL;
}
```

```
Liste::~~Liste() {
    clear();
}
```

Laufzeit:
unabhängig von Listenlänge

rekursives Löschen von
„hinten“ nach „vorne“

Laufzeit:
proportional zur Listenlänge



Laufzeit:
unabhängig von Listenlänge

iterativer Durchlauf von
„vorne“ nach „hinten“

Laufzeit:
proportional zur Listenlänge

Laufzeit:
unabhängig von Listenlänge

ADT Liste (1. Version)

```
bool Liste::empty() {
    return (sz == NULL);
}
```

```
bool Liste::is_elem(const T& x) {
    Objekt *ptr = sz;
    while (ptr != NULL) {
        if (ptr->data == x) return true;
        ptr = ptr->next;
    }
    return false;
}
```

```
void Liste::prepend(const T& x){
    Objekt *obj = new Objekt;
    obj->data = x;
    obj->next = sz;
    sz = obj;
}
```

ADT Liste (1. Version)

```
void Liste::append(const T& x) {
    Objekt *obj = new Objekt;
    obj->data = x;
    obj->next = NULL;
    if (empty()) sz = obj;
    else {
        Objekt *ptr = sz;
        while (ptr->next != NULL)
            ptr = ptr->next;
        ptr->next = obj;
    }
}
```

neuen Eintrag erzeugen

Liste leer? → Kopf = neuer Eintrag

iterativer Durchlauf von
„vorne“ nach „hinten“

Laufzeit:
proportional zur Listenlänge

```
Liste::Liste(const Liste& liste) : sz(NULL) {
    for (Objekt *ptr = liste.sz; ptr != NULL; ptr = ptr->next)
        append(ptr->data);
}
```

Laufzeit: quadratisch proportional zur Listenlänge!

ADT Liste (1. Version)

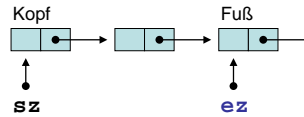
Zusammenfassung:

- Laufzeit von **clear** proportional zur Listenlänge
→ kann nicht verbessert werden, weil ja jedes Element gelöscht werden muss
→ unproblematisch, weil nur selten aufgerufen
- Laufzeit des **Kopierkonstruktors** quadratisch proportional zur Listenlänge
→ kann nur verbessert werden, wenn **append** verbessert werden kann
→ bestenfalls Laufzeit proportional zur Listenlänge: muss alle Elemente kopieren!
- Laufzeit von **is_elem** proportional zur Listenlänge
→ kann bei dieser **Datenstruktur** nicht verbessert werden
→ später verbessert durch ADT BinärerSuchbaum
- Laufzeit von **append** proportional zur Listenlänge
→ kann durch Veränderung der **Implementierung** verbessert werden
→ zusätzlicher Zeiger auf das Ende der Liste

ADT Liste (2. Version)

```
class Liste {
public:
    // keine Änderungen
private:
    struct Objekt {
        T data;
        Objekt *next;
    } *sz, *ez;
    // sonst keine Änderungen
};
```

Liste besteht aus 2 Zeigern:
 Zeiger auf Listenkopf (Start)
 Zeiger auf Listenfuß (Ende)



Kennzeichnung der leeren Liste jetzt durch Nullzeiger bei ez.

```
Liste::Liste() {
    ez = NULL;
}
```

```
bool Liste::empty() {
    return (ez == NULL);
}
```

```
Liste::~~Liste() {
    clear();
}
```

ADT Liste (2. Version)

```
void Liste::clear(Objekt *obj) {
    if (obj == NULL) return;
    clear(obj->next);
    delete obj;
}
void Liste::clear() {
    clear(sz);
    ez = NULL;
}
```

keine Änderungen!
Laufzeit:
 proportional zur Listenlänge

→ keine Verbesserung (OK)

```
bool Liste::is_elem(const T& x) {
    Objekt *ptr = sz;
    while (ptr != NULL) {
        if (ptr->data == x) return true;
        ptr = ptr->next;
    }
    return false;
}
```

keine Änderungen!

Laufzeit:
 proportional zur Listenlänge

→ keine Verbesserung (OK)

ADT Liste (2. Version)

```
void Liste::prepend(const T& x){
    Objekt *obj = new Objekt;
    obj->data = x;
    obj->next = sz;
    sz = obj;
}
```

keine Änderungen!

Laufzeit:
 unabhängig von Listenlänge

```
void Liste::append(const T& x) {
    Objekt *obj = new Objekt;
    obj->data = x;
    obj->next = NULL;
    if (empty()) sz = obj;
    else ez->next = obj;
    ez = obj;
}
```

Laufzeit:
unabhängig von Listenlänge

→ Verbesserung!

ADT Liste (2. Version)

```
Liste::Liste(const Liste& liste) {
    ez = NULL;
    for (Objekt *ptr = liste.sz; ptr != NULL; ptr = ptr->next)
        append(ptr->data);
}
```

Laufzeit:
proportional zur Listenlänge, weil append verbessert wurde → Verbesserung!

Elemente	Version 1		Version 2	
	Debug	Release	Debug	Release
5000	145469	32107	9504	1627
10000	566812	125605	19491	3279
20000	2234480	495467	38610	6444

Anzahl Elemente mal 4 ⇒
 Laufzeit mal 4²=16 (Version 1)
 Laufzeit mal 4 (Version 2)

Laufzeit in µsek. für Kopieroperation

ADT Liste (2. Version)

Zusammenfassung:

1. Laufzeit von clear proportional zur Listenlänge
 → kann nicht verbessert werden, weil ja jedes Element gelöscht werden muss
 → unproblematisch, weil nur selten aufgerufen
2. Laufzeit von is_elem proportional zur Listenlänge
 → kann bei dieser **Datenstruktur** nicht verbessert werden
 → verbessern wir gleich durch ADT BinärBaum
3. Laufzeit von append unabhängig von Listenlänge
 → war proportional zur Listenlänge in 1. Version
 → Verbesserung erzielt durch Veränderung der **Implementierung**
4. Laufzeit des Kopierkonstruktors proportional zur Listenlänge
 → war quadratisch proportional zur Listenlänge in 1. Version
 → Verbesserung erzielt durch Verbesserung von append

ADT Binärer Suchbaum

Vorbemerkungen:

Zahlenfolge (z. B. 17, 4, 36, 2, 8, 19, 40, 6, 7, 37) soll gespeichert werden, um später darin suchen zu können

Man könnte sich eine Menge A vorstellen mit Anfrage: Ist 40 ∈ A ?

Mögliche Lösung: Zahlen in einer Liste speichern und nach 40 suchen ...

... aber: **nicht effizient**, weil im schlechtesten Fall alle Elemente überprüft werden müssen!

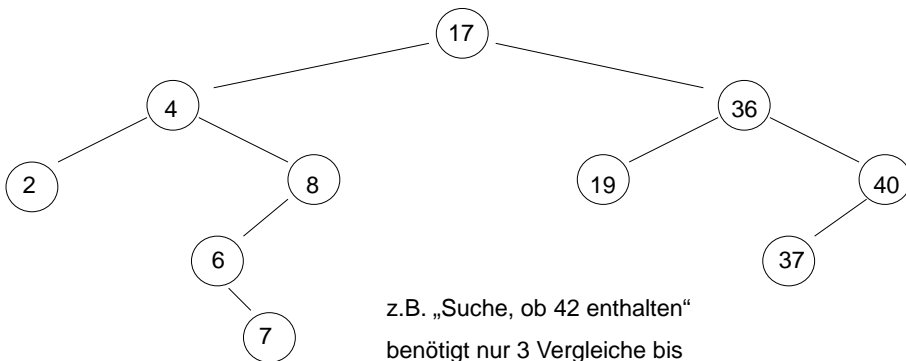
Bessere Lösungen?

ADT Binärer Suchbaum

Beispiel:

Zahlenfolge 17, 4, 36, 2, 8, 19, 40, 6, 7, 37

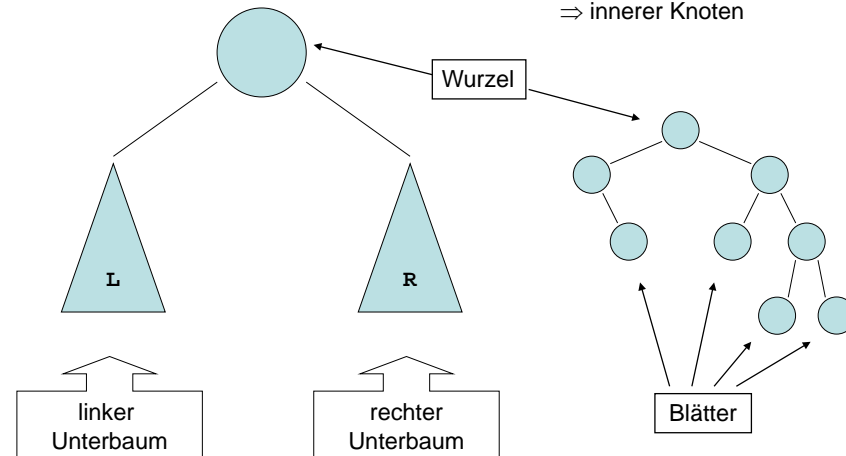
kleiner : nach links
 größer : nach rechts



z.B. „Suche, ob 42 enthalten“
 benötigt nur 3 Vergleiche bis zur Entscheidung **false**

ADT Binärer Suchbaum: Terminologie

keine Wurzel und kein Blatt
 ⇒ innerer Knoten



ADT Binärer Suchbaum: Klassendefinition

```

typedef int T;
class BinTree {
private:
    struct Node {
        T data;
        Node *left, *right;
    } *root;
    Node *insert(Node *node, T key);
    bool isElem(Node *node, T key);
    void clear(Node *node);
public:
    BinTree() { root = 0; }
    void insert(T x) { root = insert(root, x); }
    bool isElem(T x) { return isElem(root, x); }
    void clear() { clear(root); root = 0; }
    ~BinTree() { clear(); }
};

```

leerer Unterbaum
→ Nullzeiger

ADT Binärer Suchbaum: Element suchen

```

bool BinTree::isElem(Node *node, T key) {
    if (node == 0) return false;
    if (node->data == key) return true;
    if (node->data < key) return isElem(node->right, key);
    return isElem(node->left, key);
}

```

Rekursive Suche:

Falls kein Erfolg im aktuellen Knoten, dann Frage an den Unterbaum weiterreichen, der das Element enthalten müsste.

Falls Knoten Element enthält: Erfolg!

Falls Unterbaum leer, dann Element nicht vorhanden.

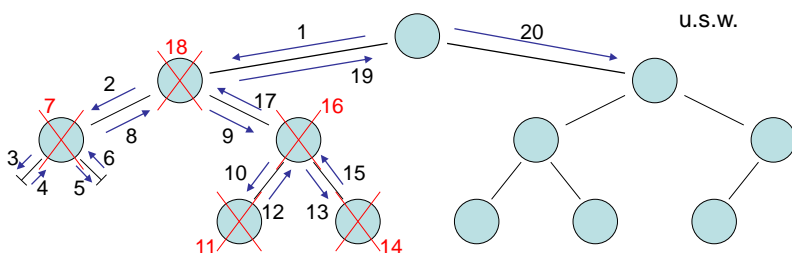
Rekursionsverankerung
(Abbruchbedingung)

ADT Binärer Suchbaum: Aufräumen

```

void BinTree::clear(Node *node) {
    if (node == 0) return; // Rekursionsabbruch
    clear(node->left); // linken Unterbaum löschen
    clear(node->right); // rechten Unterbaum löschen
    delete node; // Knoten löschen
}

```



ADT Binärer Suchbaum: Einfügen

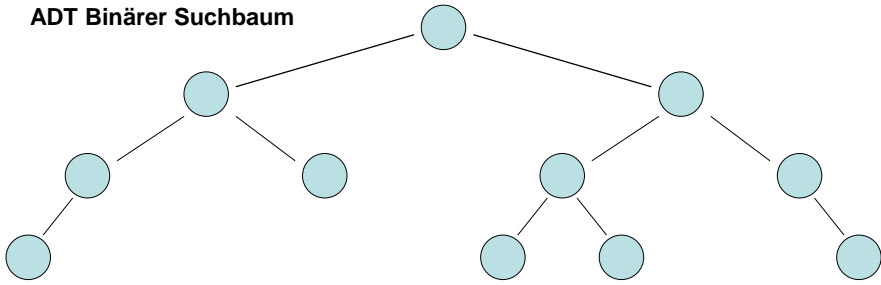
```

BinTree::Node *BinTree::insert(Node *node, T key) {
    if (node == 0) {
        node = new Node;
        node->data = key;
        node->left = node->right = 0;
        return node;
    }
    if (node->data < key)
        node->right = insert(node->right, key);
    else if (node->data > key)
        node->left = insert(node->left, key);
    return node;
}

```

Rekursives Einfügen

ADT Binärer Suchbaum



Höhe := Länge des längsten Pfades von der Wurzel zu einem Blatt.

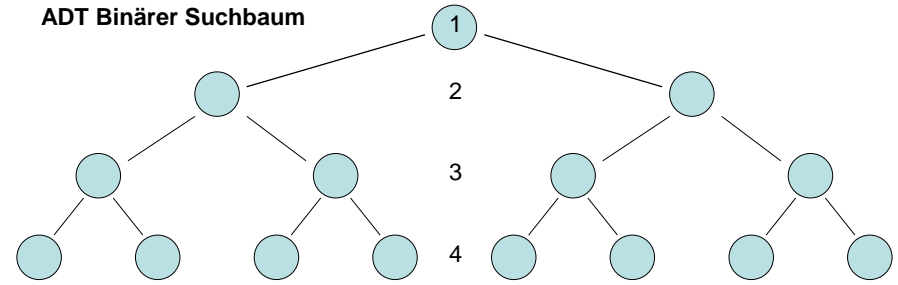
Höhe(leerer Baum) = 0

Höhe(nicht leerer Baum) = 1 + max { Höhe(linker U-Baum), Höhe(rechter U-Baum) }

Anmerkung: rekursive Definition!

(U-Baum = Unterbaum)

ADT Binärer Suchbaum

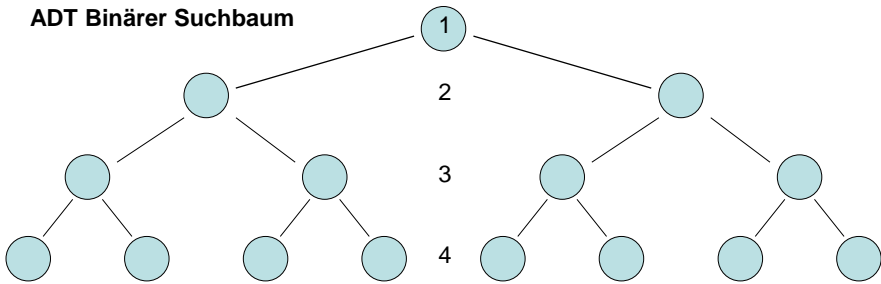


Auf Ebene k können jeweils zwischen 1 und 2^{k-1} Elemente gespeichert werden.

⇒ In einem Baum der Höhe h können also zwischen h und

$$\sum_{k=1}^h 2^{k-1} = 2^h - 1 \quad \text{Elemente gespeichert werden!}$$

ADT Binärer Suchbaum



- Ein **vollständiger Baum** der Höhe h besitzt $2^h - 1$ Knoten.
Man braucht maximal h Vergleiche, um Element (ggf. nicht) zu finden.
Bei $n = 2^h - 1$ Elementen braucht man $\log_2(n) < h$ Vergleiche!
- Ein **degenerierter Baum** der Höhe h besitzt h Knoten (= lineare Liste).
Man braucht maximal h Vergleiche, um Element (ggf. nicht) zu finden.
Bei $n = h$ braucht man also n Vergleiche!

Datei := speichert Daten in linearer Anordnung

Zwei Typen:

- **ASCII-Dateien**
 - sind mit Editor les- und schreibbar
 - Dateierdung („suffix“ oder „extension“) meist **.txt** oder **.asc**
 - betriebssystem-spezifische Übersetzung von Zeichen bei Datentransfer zwischen Programm und externem Speicher
- **Binär-Dateien**
 - werden byteweise beschrieben und gelesen
 - lesen / schreiben mit Editor ist keine gute Idee
 - schnellerer Datentransfer, da keine Zeichenübersetzung

Hier: einfache Dateibehandlung!

- Dateien können **gelesen** oder **beschrieben** werden.
- Vor dem ersten Lesen oder Schreiben muss **Datei geöffnet** werden.
- Man kann prüfen, ob das Öffnen funktioniert hat.
- Nach dem letzten Lesen oder Schreiben muss **Datei geschlossen** werden.
- Bei zu lesenden Dateien kann gefragt werden, ob **Ende der Datei** erreicht ist.
- Beim Öffnen einer zu schreibenden Datei wird vorheriger Inhalt gelöscht!
- Man kann noch viel mehr machen ...

wir benötigen:

```
#include <fstream>      bzw.      <fstream.h>
```

• Eingabe-Datei = input file	• Ausgabe-Datei = output file
<code>ifstream Quelldatei;</code>	<code>ofstream Zieldatei;</code>
↑ ↑	↑ ↑
Datentyp Bezeichner	Datentyp Bezeichner

- Öffnen der Datei:

```
Quelldatei.open(dateiName);
```

ist Kurzform von
`Quelldatei.open(dateiName, modus);`

wobei fehlender modus bedeutet:
ASCII-Datei,
Eingabedatei (weil ifstream)

- Öffnen der Datei:

```
Zieldatei.open(dateiName);
```

ist Kurzform von
`Quelldatei.open(dateiName, modus);`

wobei fehlender modus bedeutet:
ASCII-Datei,
Ausgabedatei (weil ofstream)

modus:

<code>ios::binary</code>	binäre Datei
<code>ios::in</code>	öffnet für Eingabe (implizit bei ifstream)
<code>ios::out</code>	öffnet für Ausgabe (implizit bei ofstream)
<code>ios::app</code>	hängt Daten am Dateiende an
<code>ios::nocreate</code>	wenn Datei existiert, dann nicht anlegen

Warnung: teilweise Compiler-abhängig
(`nocreate` fehlt in MS VS 2003, dafür `trunc`)

Man kann diese Schalter / Flags miteinander kombinieren via:

```
ios::binary | ios::app (öffnet als binäre Datei und hängt Daten an)
```

- **Datei öffnen**

```
file.open(fileName) bzw. file.open(fileName, modus)
```

falls Öffnen fehlschlägt, wird Nullpointer zurückgegeben

- **Datei schließen**

```
file.close()
```

sorgt für definierten Zustand der Datei auf Dateisystem;
bei nicht geschlossenen Dateien droht Datenverlust!

- **Ende erreicht?**

```
ja falls file.eof() == true
```

- **Lesen** (von ifstream)

```
file.get(c);            liest ein Zeichen
```

```
file >> x;             liest verschiedene Typen
```

- **Schreiben** (von ofstream)

```
file.put(c);            schreibt ein Zeichen
```

```
file << x;             schreibt verschiedene Typen
```

Merke:

1. Auf eine geöffnete Datei darf immer nur einer zugreifen.
2. Eine geöffnete Datei belegt Ressourcen des Betriebssystems.
⇒ Deshalb Datei nicht länger als nötig geöffnet halten.
3. Eine geöffnete Datei unbekannter Länge kann solange gelesen werden, bis das Ende-Bit (end of file, EOF) gesetzt wird.
4. Der Versuch, eine nicht vorhandene Datei zu öffnen (zum Lesen) oder eine schreibgeschützte Datei zu öffnen (zum Schreiben), führt zum Setzen eines Fehlerzustandes im `fstream`-Objekt.
⇒ Das muss überprüft werden, sonst Absturz bei weiterer Verwendung!
5. Dateieingabe und -ausgabe (input/output, I/O) ist sehr langsam im Vergleich zu den Rechenoperationen.
⇒ I/O Operationen minimieren.

"The fastest I/O is no I/O."

Nils-Peter Nelson, Bell Labs

```
#include <iostream>
#include <fstream>

using namespace std;

int main() { // zeichenweise kopieren
    ifstream Quelldatei;
    ofstream Zieldatei;

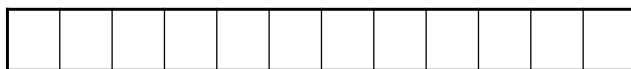
    Quelldatei.open("quelle.txt");
    if (!Quelldatei.is_open()) {
        cerr << "konnte Datei nicht zum Lesen öffnen\n";
        exit(1);
    }
    Zieldatei.open("ziel.txt");
    if (!Zieldatei.is_open()) {
        cerr << "konnte Datei nicht zum Schreiben öffnen\n";
        exit(1);
    }
}
```

```
while (!Quelldatei.eof()) {
    char c;
    Quelldatei.get(c);
    Zieldatei.put(c);
}

Quelldatei.close();
Zieldatei.close();

return 0;
}
```

offene
Datei



Start

aktuelle Position

eof() == true

Bisher:

Zeichenketten wie `char str[20];`

- Relikt aus C-Programmierung!
- bei größeren Programmen mühevoll, lästig, ...
- ... und insgesamt **fehlerträchtig!**

Jetzt:

Zeichenketten aus C++

- sehr angenehm zu verwenden (keine 0 am Ende, variable Größe, ...)
- eingebaute (umfangreiche) Funktionalität

wie benötigen: `#include <string>` und `using namespace std;`

Datendefinition / Initialisierung

```
string s1;           // leerer String
string s2 = "xyz";  // initialisieren mit C-String
string s3 = s2;     // vollständige Kopie!
string s4("abc");   // initialisieren mit C-String
string s5(s4);      // initialisieren mit C++-String
string s6(10, '*'); // ergibt String aus 10 mal *
string s7(1, 'x');  // initialisieren mit einem char
string sx('x');     // FEHLER!
string s8("");      // leerer String
```

Eingebaute Funktionen

- Konvertierung C++-String nach C-String via `c_str()`

```
const char *Cstr = s2.c_str();
```
- Stringlänge `length()`

```
cout << s2.length();
```
- Index von Teilstring finden

```
int pos = s2.find("yz");
```
- Strings addieren

```
s1 = s2 + s3;
s4 = s2 + "hello";
s5 += s4;
```

 - `substr()`,
 - `replace()`,
 - `erase()`,
 - ...
- Strings vergleichen

```
if (s1 == s2) s3 += s2;
if (s3 < s8) flag = true;
```

ADT Binäre Bäume: Anwendung

Aufgabe:

Gegeben sei eine Textdatei.
Häufigkeiten der vorkommenden Worte feststellen.
Alphabetisch sortiert ausgeben.

Strategische Überlegungen:

Lesen aus Textdatei → `ifstream` benutzen!
Sortierte Ausgabe → Binärbaum: schnelles Einfügen, sortiert „von selbst“
Worte vergleichen → C++ Strings verwenden!

Programmskizze:

Jeweils ein Wort aus Datei lesen und in Binärbaum eintragen.
Falls Wort schon vorhanden, dann Zähler erhöhen.
Wenn alle Wörter eingetragen, Ausgabe (Wort, Anzahl) via `Inorder`-Durchlauf.

zusätzlicher Zähler im Knoten

```
struct Node {
    std::string data;
    unsigned int cnt;
    BinBaum *left, *right;
};
```

gelesenes Wort
wie oft gelesen?

zusätzlicher Konstruktor (zum Einlesen der Datei)

```
BinTree::BinTree(string &filename) {
    ifstream source;
    source.open(filename.c_str());
    if (!source.is_open()) exit(1);
    string s;
    while (!source.eof()) {
        source >> s;
        insert(s);
    }
    source.close();
}
```

Datei öffnen

Worte einzeln
auslesen und im
Baum einfügen

Datei schließen

Einfügen (Änderungen in rot)

```

BinTree::Node *BinTree::insert(Node *node, T key) {
    if (node == 0) {
        node = new Node;
        node->data = key;
        node->cnt = 1;
        node->left = node->right = 0;
        return node;
    }
    if (node->data < key)
        node->right = insert(node->right, key);
    else if (node->data > key)
        node->left = insert(node->left, key);
    else
        node->cnt++;
    return node;
}

```

Ausgabe (rekursiv)

```

void BinTree::print(Node *node) {
    if (node == 0) return;
    print(node->left);
    cout << node->cnt << " " << node->data.c_str() << endl;
    print(node->right);
}

```



Dies ist die **Inorder**-Ausgabe.

Präorder:

```

cout ...;
Ausgabe(...);
Ausgabe(...);

```

Postorder:

```

Ausgabe(...);
Ausgabe(...);
cout ...;

```

Hauptprogramm:

```

#include "BinTree.h"
using namespace std;

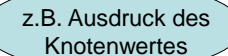
int main() {
    string s("quelle.txt");
    BinBaum b(s);
    b.print();
    return 0;
}

```

Durchlaufstrategien:

• **Tiefensuche** („depth-first search“, DFS)

- Präorder
Vor (*prä*) Abstieg in Unterbäume die „Knotenbehandlung“ durchführen
- Postorder
Nach (*post*) Abstieg in bzw. Rückkehr aus Unterbäumen die „Knotenbehandlung“ durchführen
- Inorder
Zwischen zwei Abstiegen „Knotenbehandlung“ durchführen



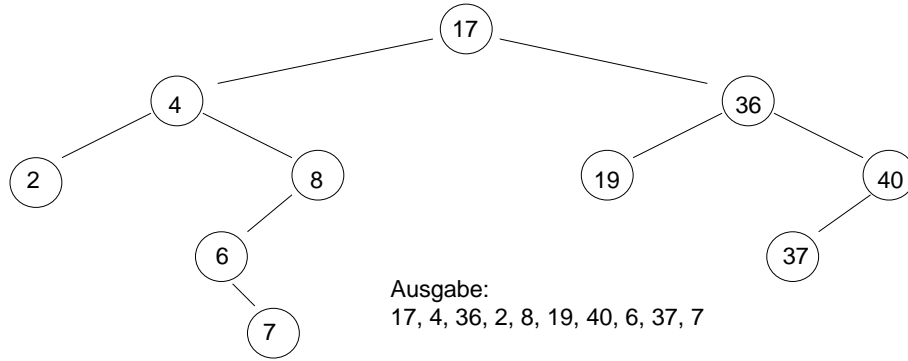
z.B. Ausdruck des Knotenwertes

• **Breitensuche** („breadth-first search“, BFS; auch: „level search“)

auf jeder Ebene des Baumes werden Knoten abgearbeitet, bevor in die Tiefe gegangen wird

Breitensuche

Beispiel: eingegebene Zahlenfolge 17, 4, 36, 2, 8, 40, 19, 6, 7, 37

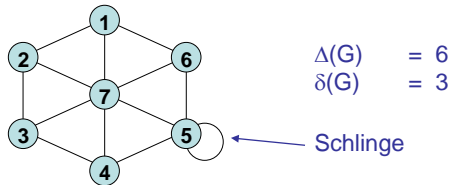


ADT Graph

- Verallgemeinerung von (binären) Bäumen
- Wichtige Struktur in der Informatik
- Zahlreiche Anwendungsmöglichkeiten
 - Modellierung von Telefonnetzen, Versorgungsnetzwerken, Straßenverkehr, ...
 - Layout-Fragen bei elektrischen Schaltungen
 - Darstellung sozialer Beziehungen
 - etc.
- Viele Probleme lassen sich als Graphenprobleme „verkleiden“ und dann mit Graphalgorithmen lösen!

Definition

Ein Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer Menge von Knoten V („vertex, pl. vertices“) und einer Menge von Kanten E („edge, pl. edges“) mit $E \subseteq V \times V$.



Eine Kante (u, v) heißt Schlinge („loop“), wenn $u = v$.

Der Grad („degree“) eines Knotens $v \in V$ ist die Anzahl der zu ihm inzidenten Kanten: $\deg(v) = |\{ (a, b) \in E : a = v \text{ oder } b = v \}|$. **Schlingen zählen doppelt.**

Maxgrad von G ist $\Delta(G) = \max \{ \deg(v) : v \in V \}$

Mingrad von G ist $\delta(G) = \min \{ \deg(v) : v \in V \}$

Definition

Für $v_i \in V$ heißt $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$ ein Weg oder Pfad in G , wenn $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für alle $i = 0, 1, \dots, k-1$.

Die Länge eines Pfades ist die Anzahl seiner Kanten.

Ein Pfad $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$ mit $v_0 = v_k$ wird Kreis genannt.

Distanz $\text{dist}(u, v)$ von zwei Knoten ist die Länge des kürzesten Pfades von u nach v .

Durchmesser $\text{diam}(G)$ eines Graphes G ist das Maximum über alle Distanzen:

$$\text{diam}(G) = \max \{ \text{dist}(u, v) : (u, v) \in V \times V \}.$$

Graph ist zusammenhängend, wenn $\forall u, v \in V$ mit $u \neq v$ einen Pfad gibt.

G heißt Baum gdw. G zusammenhängend und kreisfrei.

Darstellung im Computer

- Adjazenzmatrix A mit $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Problem:

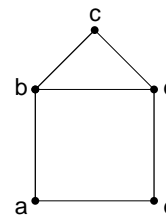
Da $|E| \leq |V|^2 = n^2$ ist Datenstruktur ineffizient (viele Nullen) wenn $|E|$ verschwindend klein.

- Adjazenzlisten:

Für jeden Knoten v eine (Nachbarschafts-) Liste L(v) mit

$$L(v) = \{ u \in V : (v, u) \in E \}$$

Beispiel



Adjazenzlisten

- L(a) = (b, e)
- L(b) = (a, c, d)
- L(c) = (b, d)
- L(d) = (b, c, e)
- L(e) = (a, d)

ADT Liste

Adjazenzmatrix

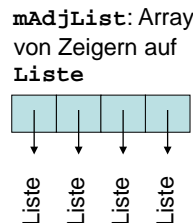
	a	b	c	d	e
a	0	1	0	0	1
b	1	0	1	1	0
c	0	1	0	1	0
d	0	1	1	0	1
e	1	0	0	1	0

Array[][]

Mögliche Funktionalität

`typedef unsigned int uint;` → `typedef Datentyp TypName;`

```
class Graph {
public:
    Graph(uint NoOfNodes);
    void addEdge(uint Node1, uint Node2);
    bool hasEdge(uint Node1, uint Node2);
    uint noOfEdges();
    uint noOfNodes();
    void printGraph();
    ~Graph();
private:
    uint mNoOfNodes;
    Liste *mAdjList;
};
```

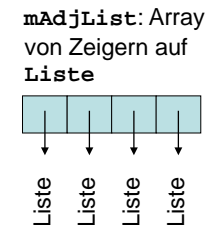


```
#include <iostream>
#include "Graph.h"
using namespace std;

Graph::Graph(uint NoOfNodes) {
    mNoOfNodes = NoOfNodes;
    if (mNoOfNodes > 0)
        mAdjList = new Liste[mNoOfNodes];
}

Graph::~Graph() {
    if (mNoOfNodes > 0) delete[] mAdjList;
}

void Graph::printGraph() {
    for (uint i = 0; i < mNoOfNodes; i++) {
        cout << i << " : ";
        mAdjList[i].print();
    }
}
```



```

void Graph::addEdge(uint Node1, uint Node2) {
    if (!hasEdge(Node1, Node2)) {
        mAdjList[Node1].append(Node2);
        mAdjList[Node2].append(Node1);
    }
}

bool Graph::hasEdge(uint Node1, uint Node2) {
    if (mNoOfNodes < 1) return false;
    return mAdjList[Node1].is_elem(Node2);
}

uint Graph::noOfEdges() {
    uint cnt = 0;
    for (uint i = 0; i < mNoOfNodes; i++)
        cnt += mAdjList[i].size();
    return cnt / 2;
}

uint Graph::noOfNodes() {
    return mNoOfNodes;
}

```

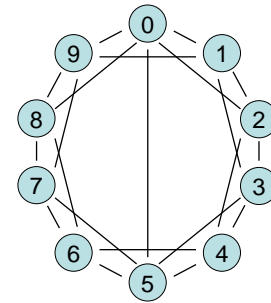
Ineffizient!Speicherung
redundanter
Information!**Ineffizient!**Falls häufig benutzt,
dann besser Zähler
mNoOfEdges in
class Graph**Test**

```

#include <iostream>
#include "Graph.h"
using namespace std;

int main() {
    Graph g(10);
    uint n = g.noOfNodes();
    cout << "Knoten: " << n << endl;
    cout << "Kanten: " << g.noOfEdges() << endl;
    for (uint i = 0; i < n; i++)
        g.addEdge(i, (i+1) % n);
    for (uint i = 0; i < n; i++)
        g.addEdge(i, (i+2) % n);
    g.addEdge(5,0);
    if (g.hasEdge(0,5))
        cout << "Kante (0,5) existiert" << endl;
    g.printGraph();
    cout << "Kanten: " << g.noOfEdges() << endl;
    return 0;
}

```


Verbesserungsmöglichkeiten

- Überprüfung, ob Knotennummer zulässig (< Anzahl Knoten) !
- Zähler `mNoOfEdges` → wird erhöht, wenn neue Kante eingefügt wird
- Kanten sind bidirektional → nur einmal speichern!
→ erfordert Anpassung in einigen Methoden!

```

void Graph::addEdge(uint Node1, uint Node2) {
    if (Node1 > Node2) Swap(&Node1, &Node2);
    if (!hasEdge(Node1, Node2))
        mAdjList[Node1].append(Node2);
}

bool Graph::hasEdge(uint Node1, uint Node2) {
    if (mNoOfNodes < 1) return false;
    if (Node1 > Node2) Swap(&Node1, &Node2);
    return mAdjList[Node1].is_elem(Node2);
}

```

Idee:Normierung, so
dass kleinere
Knotennummer
zuerst

- Funktionalität erweitern: Hinzufügen Knoten; Löschen Knoten / Kanten, etc.