technische universität dortmund

Einführung in die Programmierung

Wintersemester 2010/11

Prof. Dr. Günter Rudolph
Lehrstuhl für Algorithm Engineering
Fakultät für Informatik
TU Dortmund

Inhalt

- Rekursion: Technik
- Rekursion vs. Iteration

Definition (einfache, erste Version)

Rekursives Programm	:= Programm, das sich selbst aufruft
Rekursive Funktion	:= Funktion, die sich selbst aufruft

offensichtlich:

Es muss eine Abbruchbedingung geben …

gibt an, wann Programm / Funktion aufhören soll, sich selbst aufzurufen

⇒ sonst unendliche Rekursion

⇒ entspricht einer Endlosschleife

Arbeitsprinzip:

rekursiver Algorithmus löst Problem

durch Lösung mehrerer kleinerer Instanzen des gleichen Problems

⇒ Zerlegung des Problems in kleinere Probleme gleicher Art

Rekursionsprinzip schon lange bekannt (> 2000 Jahre)

- zunächst in der Mathematik (z. B. Euklid)
- führte in der Informatik zu fundamentalen Techniken beim Algorithmendesign
  - z.B. „teile und herrsche“-Methode (divide-and-conquer)
  - z.B. dynamisches Programmieren

Thematik inhaltsschwer für eigene 2- bis 4-stündige Vorlesung → hier: nur 1. Einstieg

Rekursion in der Mathematik

Beispiel: Fakultät

f(0) = 1 Rekursionsverankerung

$\forall n \in \mathbb{N}$: f(n) = n * f(n – 1) Rekursionsschritt

Beispiel: Rekursive Definition logischer Ausdrücke

1. Wenn v logische Variable (**`true`**, **`false`**),
   dann v und NOT v logischer Ausdruck.
2. Wenn a und b logische Ausdrücke,
   dann a AND b sowie a OR b logische Ausdrücke.
3. Alle logischen Ausdrücke werden mit 1. und 2. aufgebaut.

Rekursion in der Informatik

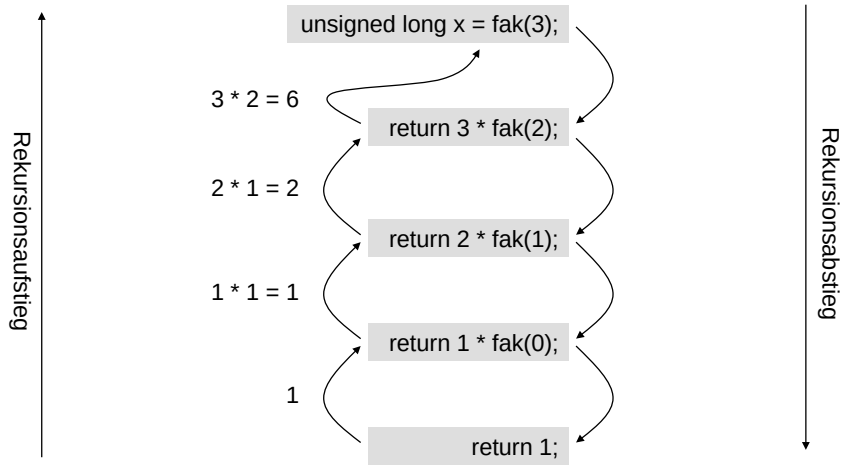
Beispiel: Fakultät

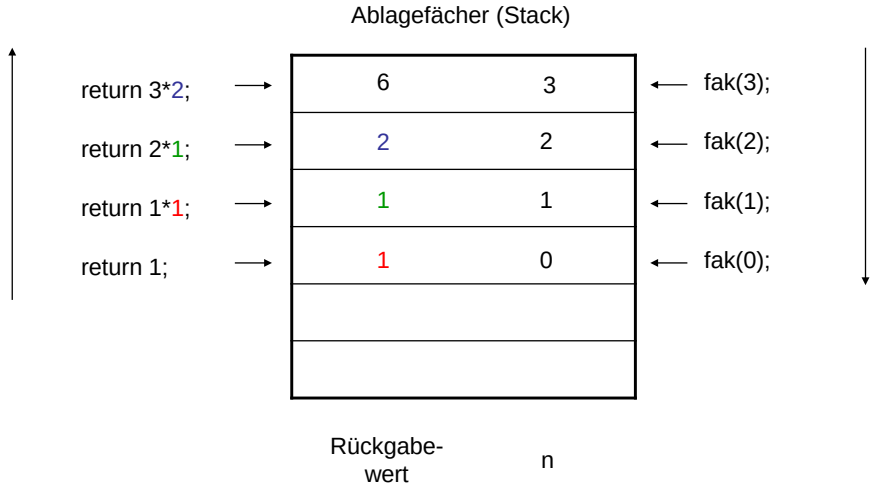
f(0) = 1 Rekursionsverankerung

$\forall n \in \mathbb{N}$: f(n) = n * f(n – 1) Rekursionsschritt

```
unsigned long fak(unsigned int n) {
  if (n == 0) return 1;    // Rekursionsverankerung
  return n * fak(n – 1);   // Rekursionsschritt
}
```

⇒ Rekursionsverankerung verhindert endlose Rekursion!





```
unsigned long fak(unsigned int n) {
  if (n == 0) return 1;    // Rekursionsverankerung
  return n * fak(n – 1);   // Rekursionsschritt
}
```

Beobachtung:

1. Der Basisfall des Problems muss gelöst werden können (Rekursionsverankerung).
2. Bei jedem rekursiven Aufruf müssen kleinere Problemgrößen übergeben werden.

Weiteres Beispiel:

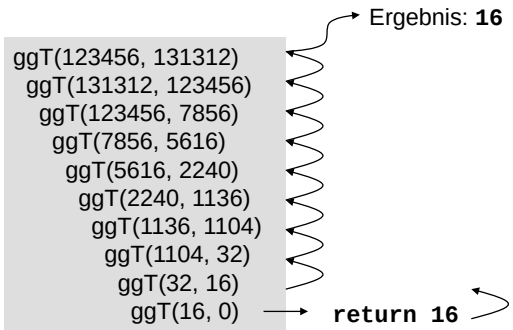
Bestimme den größten gemeinsamen Teiler (ggT) zweier Zahlen

⇒ Euklidischer Algorithmus (> 2000 Jahre)

in C++:

```
unsigned int ggT(unsigned int a, unsigned int b) {
  if (b == 0) return a;    // Rekursionsverankerung
  return ggT(b, a % b);    // Rekursionsschritt
}
```

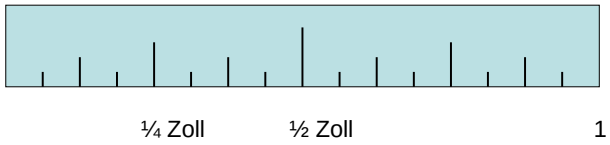
Verkleinerung des Problems



Abbruchbedingung!

Noch ein Beispiel:

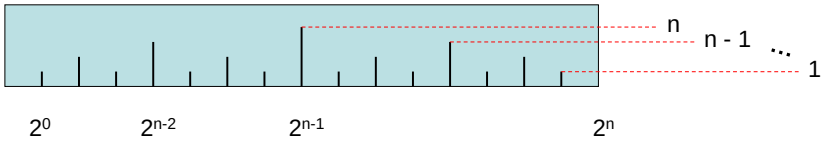
Zeichne Maßstriche auf ein (amerikanisches) Lineal



- Marke bei ½ Zoll
- kleinere Marke bei je ¼ Zoll
- noch kleinere Marke bei je 1/8 Zoll
- u.s.w. immer kleinere Marken bei je $1/2^n$

Annahme: Auflösung soll $1/2^n$ für gegebenes n sein

⇒ Maßstabsänderung:



Idee:

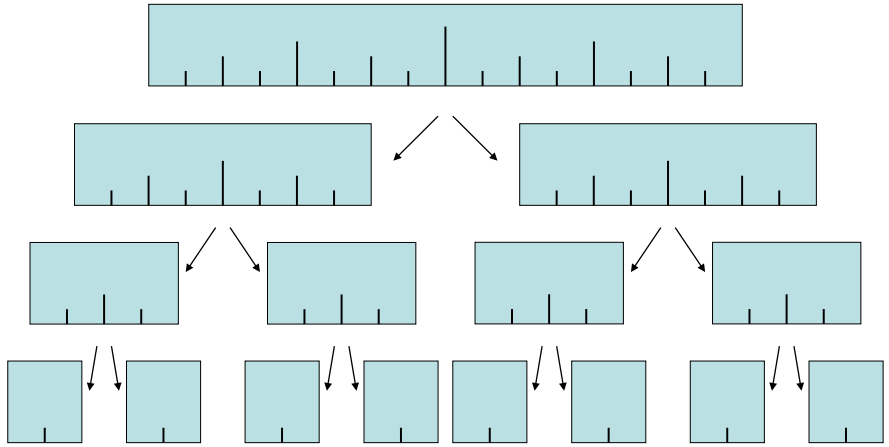
Teile Intervall in 2 gleich große Hälften,

zeichne linkes, halb so großes Lineal mit kürzerer Marke ← rekursiv!

erzeuge längere Marke in der Mitte

zeichne rechtes, halb so großes Lineal mit kürzerer Marke ← rekursiv!

Illustration:



Also:

Zeichnen des Lineals wird so lange auf kleinere Probleme / Lineale vereinfacht,

bis wir das elementare Problem / Lineal lösen können:

„Zeichne eine Marke der Höhe 1“

Jetzt: Rekursionsaufstieg

linkes (elementares) Lineal zeichnen ☑

zeichne Marke der Höhe h (= 2) ☑

rechtes (elementares) Lineal zeichnen ☑

⇒ Teilproblem gelöst!

Implementierung

Welche Parameter spielen eine Rolle?

linker Rand des Teil-Lineals → **`li`**

rechter Rand des Teil-Lineals → **`re`**

Höhe der Marke → **`h`**

Mitte des Teil-Lineals (für die Marke) → **`mi`**

```
void Lineal(unsigned int li,unsigned int re,unsigned int h) {

  unsigned int mi = (li + re) / 2;
  if (h > 0) {
    Lineal(li, mi, h – 1);
    Marke(mi, h);
    Lineal(mi, re, h – 1);
  }
}
```

Implementierung

Zeichnen der Marken (mehrere Möglichkeiten)

hier: wir wissen, dass Marken von links nach rechts gezeichnet werden

⇒ Testausgabe mit senkrechtem Lineal (Marken von oben nach unten)

```
void Marke(unsigned int position, unsigned int hoehe) {
  while (hoehe--) cout << '-';
  cout << endl;
}
```

Anmerkung:

position wird hier nicht gebraucht, aber andere Situationen vorstellbar

Implementierung

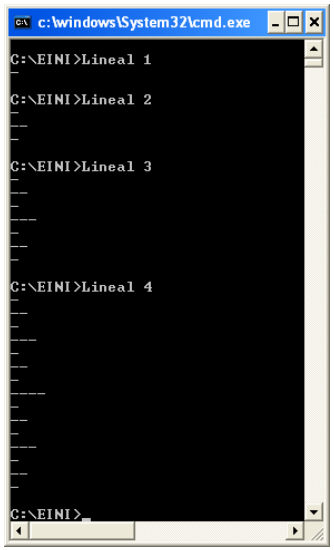
Hauptprogramm zum Testen

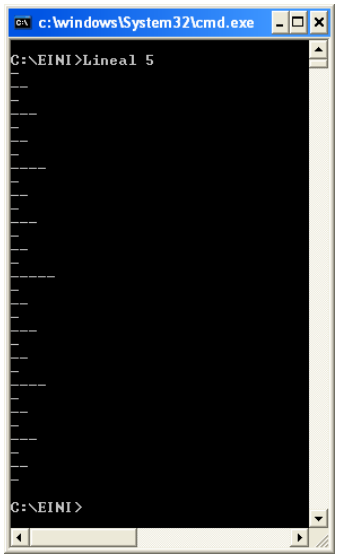
```
#include <iostream>
using namespace std;

int main(int argc, char *argv[]) {
  if (argc != 2) {
    cerr << "usage: " << argv[0] << ": n" << endl;
    return 1;
  }
  unsigned int n = atoi(argv[1]);
  Lineal(0, 1 << n, n);
  return 0;
}
```

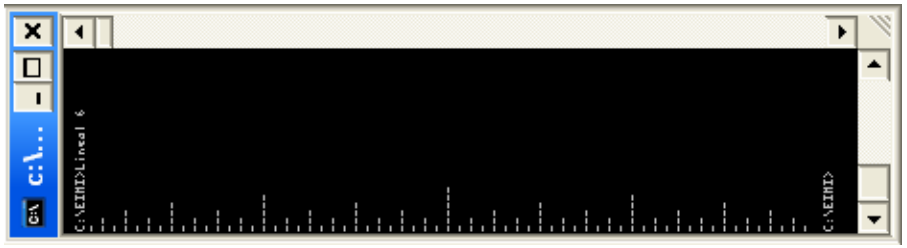
<< im numerischen Ausdruck: **x << n**
schiebt Bitmuster von **x** um **n** Bits nach links.

Was bedeutet **x >> n** ?





Lineal mit $2^6 = 64$ Marken:



Rekursion vs. Iteration

Theorem:
Jeder iterative Algorithmus lässt sich rekursiv formulieren und umgekehrt!

Wofür also das alles?

⇒ Manche Probleme lassen sich mit Rekursion sehr elegant + einfach lösen.

⇒ Lösung durch Iteration kann komplizierter sein!

Andererseits:

⇒ Nicht jedes Problem lässt sich durch Rekursion effizient lösen!

⇒ Iterative Lösung kann viel effizienter (auch einfacher) sein.

Rekursion vs. Iteration

beide einfach,
aber nicht gleich effizient

Iterative Lösung zur Fakultät:

```
unsigned long fak(unsigned int n) {
  unsigned int wert = 1;
  while (n > 0) wert *= n--;
  return wert;
}
```

1 Funktionsaufruf
1 x 2 Ablagefächer
1 lokale Variable

Rekursive Lösung zur Fakultät:

```
unsigned long fak(unsigned int n) {
  if (n == 0) return 1;
  return n * fak(n – 1);
}
```

n Funktionsaufrufe
n x 2 Ablagefächer
0 lokale Variable

Rekursion vs. Iteration

```
void Lineal(unsigned int li,unsigned int re,unsigned int h) {
  for (int t = 1, j = 1; t <= h; j += j, t++)
    for (int i = 0; li + j + i <= re; i += j + j)
      Marke(li + j + i, t);
}
```

Zeichnet erst alle Marken der Höhe 1, dann 2, usw. mit Auslassungen

```
void Lineal(unsigned int li,unsigned int re,unsigned int h) {
  unsigned int mi = (li + re) / 2;
  if (h > 0) {
    Lineal(li, mi, h – 1);
    Marke(mi, h);
    Lineal(mi, re, h – 1);
  }
}
```


Rekursion vs. Iteration

Zur einfachen Übertragung rekursiver Algorithmen
in iterative äquivalente Form benötigen wir spezielle Datenstrukturen (**`stack`**).

Diese und einige andere werden in späteren Kapitel eingeführt.

⇒ **Elementare Datenstrukturen**

Intervallschachtelung

Bestimme Nullstelle einer streng monotonen Funktion f: [a, b] → $\mathbb{R}$

Annahme: f(a) · f(b) < 0, also haben f(a) und f(b) verschiedene Vorzeichen.

```
double nullstelle(double a, double b) {
  double const eps = 1.0e-10;
  double fa = f(a), fb = f(b);
  double c = (a + b) / 2., fc = f(c);
  if (fabs(fa - fb) < eps) return c;
  return (fa < 0 && fc < 0 || fa > 0 && fc > 0) ?
    nullstelle(c, b) : nullstelle(a, c);
}
```