

Einführung in die Programmierung

Wintersemester 2009/10

Prof. Dr. Günter Rudolph
Lehrstuhl für Algorithm Engineering
Fakultät für Informatik
TU Dortmund

Kapitel 7: Rekursion

Inhalt

- Rekursion: Technik
- Rekursion vs. Iteration

Rekursion

Kapitel 7

Definition (einfache, erste Version)

Rekursives Programm := Programm, das sich selbst aufruft

Rekursive Funktion := Funktion, die sich selbst aufruft

offensichtlich:

Es muss eine Abbruchbedingung geben ...

gibt an, wann
Programm / Funktion
aufhören soll, sich
selbst aufzurufen

⇒ sonst unendliche Rekursion

⇒ entspricht einer Endlosschleife



Rekursion

Kapitel 7

Arbeitsprinzip:

rekursiver Algorithmus löst Problem
durch Lösung mehrerer kleinerer Instanzen des gleichen Problems

⇒ Zerlegung des Problems in kleinere Probleme gleicher Art

Rekursionsprinzip schon lange bekannt (> 2000 Jahre)

- zunächst in der Mathematik (z. B. Euklid)
- führte in der Informatik zu fundamentalen Techniken beim Algorithmen-Design
 - z.B. „teile und herrsche“-Methode (divide-and-conquer)
 - z.B. dynamisches Programmieren

Thematik inhaltsschwer für eigene 2- bis 4-stündige Vorlesung → hier: nur 1. Einstieg

Rekursion in der Mathematik

Beispiel: Fakultät

$f(0) = 1$ Rekursionsverankerung
 $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = n * f(n - 1)$ Rekursionsschritt

Beispiel: Rekursive Definition logischer Ausdrücke

1. Wenn v logische Variable (**true**, **false**), dann v und **NOT** v logischer Ausdruck.
2. Wenn a und b logische Ausdrücke, dann **a AND b** sowie **a OR b** logische Ausdrücke.
3. Alle logischen Ausdrücke werden mit 1. und 2. aufgebaut.

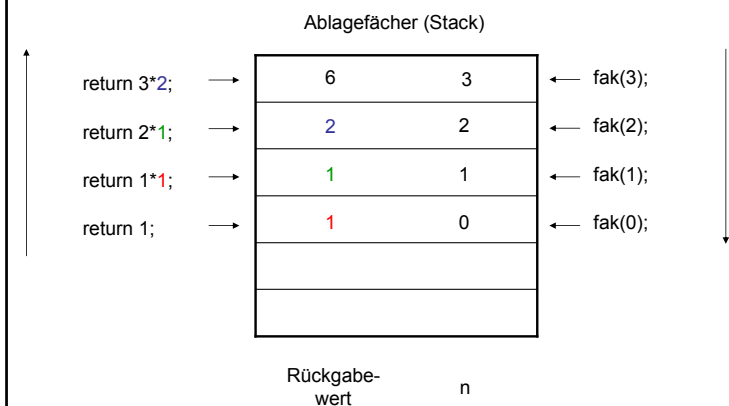
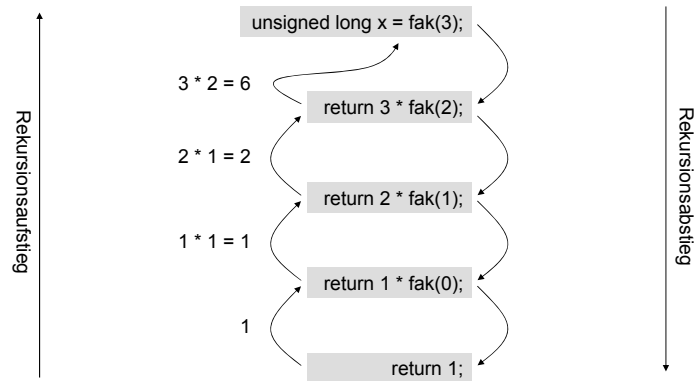
Rekursion in der Informatik

Beispiel: Fakultät

$f(0) = 1$ Rekursionsverankerung
 $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = n * f(n - 1)$ Rekursionsschritt

```
unsigned long fak(unsigned int n) {
    if (n == 0) return 1; // Rekursionsverankerung
    return n * fak(n - 1); // Rekursionsschritt
}
```

⇒ Rekursionsverankerung verhindert endlose Rekursion!



```
unsigned long fak(unsigned int n) {
    if (n == 0) return 1;    // Rekursionsverankerung
    return n * fak(n - 1);  // Rekursionsschritt
}
```

Beobachtung:

1. Der Basisfall des Problems muss gelöst werden können (Rekursionsverankerung).
2. Bei jedem rekursiven Aufruf müssen kleinere Problemgrößen übergeben werden.

Weiteres Beispiel:

Bestimme den größten gemeinsamen Teiler (ggT) zweier Zahlen

⇒ Euklidischer Algorithmus (> 2000 Jahre)

in C++:

```
unsigned int ggT(unsigned int a, unsigned int b) {
    if (b == 0) return a;    // Rekursionsverankerung
    return ggT(b, a % b);    // Rekursionsschritt
}
```

Verkleinerung des Problems

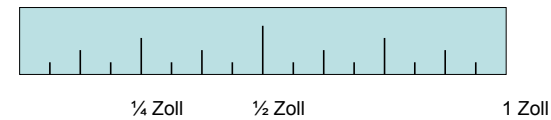
```
ggT(123456, 131312)
ggT(131312, 123456)
ggT(123456, 7856)
ggT(7856, 5616)
ggT(5616, 2240)
ggT(2240, 1136)
ggT(1136, 1104)
ggT(1104, 32)
ggT(32, 16)
ggT(16, 0) → return 16
```

Ergebnis: 16

Abbruchbedingung!

Noch ein Beispiel:

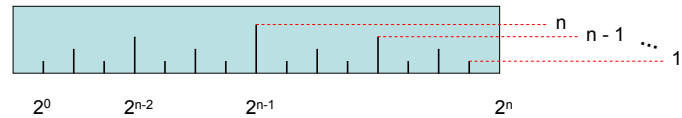
Zeichne Maßstriche auf ein (amerikanisches) Lineal



- Marke bei ½ Zoll
- kleinere Marke bei je ¼ Zoll
- noch kleinere Marke bei je 1/8 Zoll
- u.s.w. immer kleinere Marken bei je 1/2ⁿ

Annahme: Auflösung soll $1/2^n$ für gegebenes n sein

⇒ Maßstabsänderung:



Idee:

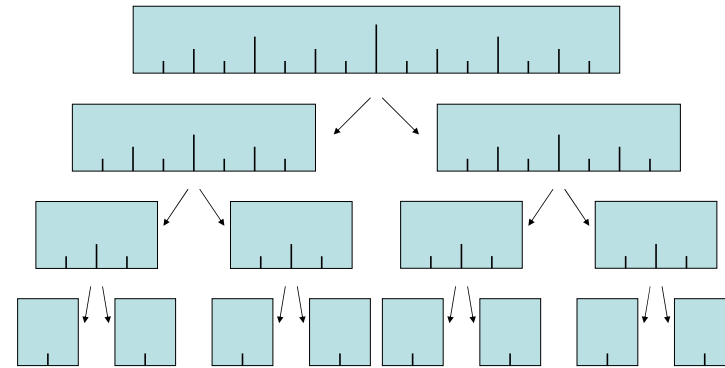
Teile Intervall in 2 gleich große Hälften,

zeichne linkes, halb so großes Lineal mit kürzerer Marke ← rekursiv!

erzeuge längere Marke in der Mitte

zeichne rechtes, halb so großes Lineal mit kürzerer Marke ← rekursiv!

Illustration:



Also:

Zeichnen des Lineals wird so lange auf kleinere Probleme / Lineale vereinfacht, bis wir das elementare Problem / Lineal lösen können:

„Zeichne eine Marke der Höhe 1“

Jetzt: Rekursionsaufstieg

linkes (elementares) Lineal zeichnen ☑

zeichne Marke der Höhe $h (= 2)$ ☑

rechtes (elementares) Lineal zeichnen ☑

} ⇒ Teilproblem gelöst!

Implementierung

Welche Parameter spielen eine Rolle?

linker Rand des Teil-Lineals → li

rechter Rand des Teil-Lineals → re

Höhe der Marke → h

Mitte des Teil-Lineals (für die Marke) → mi

```
void Lineal(unsigned int li,unsigned int re,unsigned int h) {
    unsigned int mi = (li + re) / 2;
    if (h > 0) {
        Lineal(li, mi, h - 1);
        Marke(mi, h);
        Lineal(mi, re, h - 1);
    }
}
```

Implementierung

Zeichnen der Marken (mehrere Möglichkeiten)

hier: wir wissen, dass Marken von links nach rechts gezeichnet werden
 ⇒ Testausgabe mit senkrechtem Lineal (Marken von oben nach unten)

```
void Marke(unsigned int position, unsigned int hoehe) {
    while (hoehe-->0) cout << '-';
    cout << endl;
}
```

Anmerkung:

`position` wird hier nicht gebraucht, aber andere Situationen vorstellbar

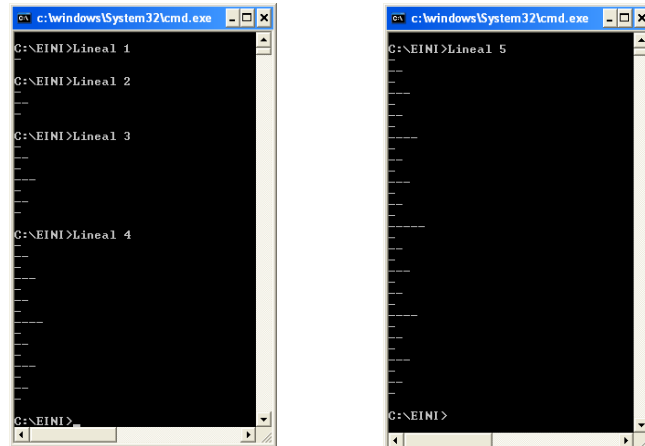
Implementierung

Hauptprogramm zum Testen

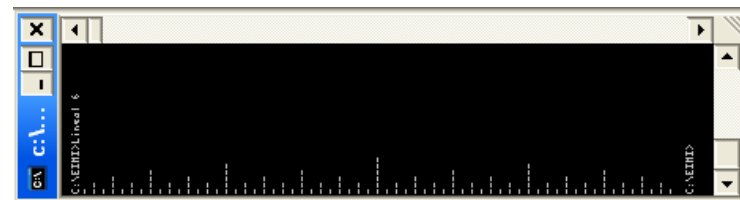
```
#include <iostream>
using namespace std;

int main(int argc, char *argv[]) {
    if (argc != 2) {
        cerr << "usage: " << argv[0] << " : n" << endl;
        return 1;
    }
    unsigned int n = atoi(argv[1]);
    Lineal(0, 1 << n, n);
    return 0;
}
```

<< im numerischen Ausdruck: $x \ll n$ schiebt Bitmuster von x um n Bits nach links. Was bedeutet $x \gg n$?



Lineal mit $2^6 = 64$ Marken:



Rekursion vs. Iteration

Theorem:

Jeder iterative Algorithmus lässt sich rekursiv formulieren und umgekehrt!

Wofür also das alles?

- ⇒ Manche Probleme lassen sich mit Rekursion sehr elegant + einfach lösen.
- ⇒ Lösung durch Iteration kann komplizierter sein!

Andererseits:

- ⇒ Nicht jedes Problem lässt sich durch Rekursion effizient lösen!
- ⇒ Iterative Lösung kann viel effizienter (auch einfacher) sein.

Rekursion vs. Iteration

beide einfach,
aber nicht gleich effizient

Iterative Lösung zur Fakultät:

```
unsigned long fak(unsigned int n) {
    unsigned int wert = 1;
    while (n > 0) wert *= n--;
    return wert;
}
```

} 1 Funktionsaufruf
1 x 2 Ablagefächer
1 lokale Variable

Rekursive Lösung zur Fakultät:

```
unsigned long fak(unsigned int n) {
    if (n == 0) return 1;
    return n * fak(n - 1);
}
```

} n Funktionsaufrufe
n x 2 Ablagefächer
0 lokale Variable

Rekursion vs. Iteration

```
void Lineal(unsigned int li,unsigned int re,unsigned int h) {
    for (int t = 1, j = 1; t <= h; j += j, t++)
        for (int i = 0; li + j + i <= re; i += j + j)
            Marke(li + j + i, t);
}
```

Zeichnet erst alle Marken der Höhe 1,
dann 2, usw. mit Auslassungen

```
void Lineal(unsigned int li,unsigned int re,unsigned int h) {
    unsigned int mi = (li + re) / 2;
    if (h > 0) {
        Lineal(li, mi, h - 1);
        Marke(mi, h);
        Lineal(mi, re, h - 1);
    }
}
```

Rekursion vs. Iteration

Zur einfachen Übertragung rekursiver Algorithmen
in iterative äquivalente Form benötigen wir spezielle Datenstrukturen (**stack**).

Diese und einige andere werden in späteren Kapitel eingeführt.

⇒ **Elementare Datenstrukturen**

Intervallschachtelung

Bestimme Nullstelle einer streng monotonen Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Annahme: $f(a) \cdot f(b) < 0$, also haben $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen.

```
double nullstelle(double a, double b) {  
    double const eps = 1.0e-10;  
    double fa = f(a), fb = f(b);  
    double c = (a + b) / 2., fc = f(c);  
    if (fabs(fa - fb) < eps) return c;  
    return (fa < 0 && fc < 0 || fa > 0 && fc > 0) ?  
        nullstelle(c, b) : nullstelle(a, c);  
}
```

