

Mehrkriterielle Optimierung durch evolutionäre Algorithmen mit S-Metrik-Selektion

Nicola Beume, Boris Naujoks und Günter Rudolph

Lehrstuhl für Algorithm Engineering, Universität Dortmund
44221 Dortmund, Deutschland

Tel.: (0231) 755-7701

Fax: (0231) 755-7740

E-Mail: {nicola.beume, boris.naujoks, guenter.rudolph}@udo.edu,

<http://ls11-www.cs.uni-dortmund.de/>

Zusammenfassung

Bei der mehrkriteriellen Pareto-Optimierung wird zu konfliktären Anforderungen eine Menge von Kompromisslösungen gesucht, die die bestmöglichen Lösungen approximieren. Evolutionäre Algorithmen haben sich hierbei als effektive und robuste Verfahren bewährt. Die Güte einer Approximation lässt sich durch das von ihr dominierte Hypervolumen im Zielraum, der sogenannten S-Metrik, quantifizieren. Die Maximierung der S-Metrik ist also ein erstrebenswertes Ziel und gleichzeitig eine hinreichende einkriterielle Ersatzzielfunktion. Ein evolutionärer Algorithmus setzt diese innerhalb der Selektion ein und erreicht dadurch hervorragende Ergebnismengen. Wir zeigen anhand von Benchmarkproblemen und realen Anwendungen aus der Flugzeugtechnik, dass dieser Algorithmus außerordentlich effektiv ist. Dies zeigt sich insbesondere für den Fall, wenn mehr als drei Ziele zu optimieren sind, weil dann andere populäre mehrkriterielle evolutionäre Algorithmen versagen.

1 Einführung in Mehrkriterielle Evolutionäre Algorithmen

Bei der Mehrzieloptimierung werden an eine Problemlösung mehrere Anforderungen gestellt, die es bestmöglich zu erfüllen gilt. Diese Anforderungen (*Zielfunktionen*) sind typischerweise konfliktär, sodass ein Optimum bezüglich aller Funktionen nicht mit einer Lösung zu erreichen ist. Wie aus dem Alltag vertraut, gibt es keine Lösung, die alle Wünsche optimal erfüllt.

Mehrzieloptimierverfahren suchen bei der Pareto-Optimierung nicht nach *einer* möglichst guten Lösung, sondern nach einer Menge von Kompromisslösungen, aus denen der Anwender nach seinen Vorlieben eine zur Realisierung auswählt. Eine Lösung eines d -kriteriellen Problems wird über ihren zugehörigen d -dimensionalen Zielfunktionsvektor bewertet. Zielfunktionsvektoren sind partiell geordnet, d. h. zwei Vektoren sind unvergleichbar, falls jeder eine bessere Komponente enthält als der andere. Ein Vektor *dominiert* einen anderen, falls er in mindestens einer Komponente besser ist und in keiner schlechter. Die Lösungen, deren Zielfunktionsvektoren von keinem in der Lösungsmenge dominiert werden, heißen *nicht-dominiert*. Die Zielfunktionsvektoren, die bezogen auf den gesamten Suchraum nicht-dominiert, also *Pareto-optimal* sind, heißen *Pareto-Front* und ihre erzeugenden Lösungen *Pareto-Menge*.

Die Zielsetzung von Optimierverfahren ist meist die Approximation der Pareto-Front. Es sollen möglichst viele nicht-dominierte Lösungen gefunden werden, damit dem Anwender eine große Auswahl zur Verfügung steht. Die gefundenen Zielfunktionsvektoren

sollen nah an der Pareto-Front liegen und sich dabei entlang der gesamten Pareto-Front verteilen.

Evolutionäre Mehrziel-Optimier-Algorithmen (EMOA) haben sich als leistungsfähige Verfahren bewährt. Es sind randomisierte Suchheuristiken, die eine gute Lösung nicht durch Analyse des Problems konstruieren, sondern durch Ausprobieren von Lösungsmöglichkeiten schrittweise zu Verbesserungen gelangen. Sie sind inspiriert von der darwinistischen Vorstellung der natürlichen Evolution als eines Verbesserungsprozesses durch Reproduktion, Variation und Auslese. Eine grundlegende Übersicht zu EMOA bieten Deb [1] oder Coello Coello et al. [2].

Hat man mehrere Mehrzieloptimierverfahren zur Verfügung, möchte man ihre Ergebnismengen vergleichen, um herauszufinden, welches Verfahren für das Problem am geeignetsten erscheint. Gibt es in einer Menge einen Vektor, der bzgl. der Pareto-Dominanz mit keinem in der anderen Menge vergleichbar ist, dann sind auch die Mengen unvergleichbar. Dies ist der typische Fall bei Vergleichsstudien, daher verwendet man Qualitätsmaße (*Metriken*), die die Güte einer Menge bezüglich eines Qualitätsmerkmals quantifizieren. Entsprechend der skalaren Metrikerwerte können Mengen vollständig geordnet werden, wobei die Sinnhaftigkeit vieler Metriken umstritten ist. Eine einfache Metrik ist die *Konvergenz-Metrik*, die den durchschnittlichen Abstand der Menge zur Pareto-Front misst.

Unter den zahlreichen Metriken gilt die *S-Metrik* von Zitzler und Thiele [3] als eines der sinnvollsten und gerechtesten Maße (vgl. Zitzler et al. [4]). Sie misst das dominierte Hypervolumen, d.h. den Bereich des Zielraums, in dem sich Vektoren befinden, die schlechter sind als mindestens ein Mitglied der Menge. Der S-Metrikerwert ist zu maximieren, was bildlich einer „Eroberung“ des Raums entspricht. Das größte Hypervolumen wird von der Pareto-Front dominiert.

2 Dominiertes Hypervolumen als Selektionskriterium

2.1 Motivation und Ablauf des SMS-EMOA

Da die S-Metrik ein anerkannter Qualitätsindikator ist, ist ein hoher S-Metrikerwert der Ergebnismenge erstrebenswert. Somit ist es naheliegend, die Maximierung des S-Metrikerwertes schon während des Optimierprozesses explizit anzusteuern. Dies wurde realisiert in dem S-Metrik-Selektions-EMOA (SMS-EMOA) von Emmerich et al. [5, 6]. Das Hypervolumen-basierte Selektionskriterium bildet die partiell geordneten Zielfunktionsvektoren auf skalare Fitnesswerte ab. Dies ermöglicht eine vollständige Ordnung der Lösungen und eine entsprechende Selektion der Besten. Die Selektion wählt die Teilmenge von Lösungen als Folgepopulation aus, deren S-Metrikerwert unter den möglichen Teilmengen maximal ist.

Der Ablauf des SMS-EMOA ist in Algorithmus 1 dargestellt. Für die Startpopulation werden μ Lösungen (*Individuen*) zufällig generiert oder mit bekannten Problemlösungen initialisiert. Jede Generation des evolutionären Prozesses beginnt mit der Variation, die mit Hilfe randomisierter Operatoren aus der Population der vorhandenen Lösungen genau ein neues Individuum erzeugt. Es wurden keine speziellen Variationsoperatoren für den SMS-EMOA entworfen, diese können aus der Literatur (siehe z.B. Bäck et al. [7], Deb [1]) oder problemspezifisch gewählt werden.

$P_0 \leftarrow \text{init}$	<i>Initialisiere Start-Population mit μ Individuen</i>
$t \leftarrow 0$	<i>Initialisiere Generationenzähler</i>
repeat	
$\mathbf{o} \leftarrow \text{variation}(P_t)$	<i>Erzeuge 1 Ind. durch Variationsoperatoren</i>
$D \leftarrow \text{dominierte_Individuen}(P_t \cup \mathbf{o})$	
if $D \neq \emptyset$ then	
$\mathbf{a}^* \leftarrow \text{argmax}_{\mathbf{a} \in D} [dz(\mathbf{a}, P_t \cup \mathbf{o})]$	<i>Ind. mit max. Dominanzzahl</i>
else	
$\mathbf{a}^* \leftarrow \text{argmin}_{\mathbf{a} \in \{P_t \cup \mathbf{o}\}} [\Delta_S(\mathbf{a}, P_t \cup \mathbf{o})]$	<i>Ind. mit min. S-Metrik-Beitrag</i>
$P_{t+1} \leftarrow \{P_t \cup \mathbf{o}\} \setminus \{\mathbf{a}^*\}$	<i>entferne gewähltes Ind.</i>
$t \leftarrow t + 1$	
until <i>Abbruchkriterium erfüllt</i>	

Algorithmus 1: SMS-EMOA

Die Selektionskomponente reduziert die $\mu + 1$ Lösungen auf μ . Moderne EMOA bestehen aus einem primären Selektionskriterium, das auf der Pareto-Dominanz basiert und einem sekundären, welches herangezogen wird, falls nicht alle bzgl. des primären Kriteriums gleichwertigen Individuen in die Folgepopulation aufgenommen werden können. Beim SMS-EMOA ist das primäre Kriterium die Einteilung der Population in nicht-dominierte und dominierte Individuen. Falls die Population dominierte Individuen enthält, wird unter diesen das mit der größten *Dominanzzahl* aussortiert. Die Dominanzzahl eines Individuums ist die Anzahl Individuen, die dieses dominieren. Eine Lösung gilt also als schlecht, wenn es viele bessere gibt. Besteht die Population nur aus nicht-dominierten Individuen, wird das mit kleinstem S-Metrik-Beitrag entfernt. Das ist das Hypervolumen, welches nur von einem einzigen Individuum dominiert wird und somit verfällt, wenn es aus der Population entfernt wird. Der kleinste Beitrag minimiert diesen Verlust.

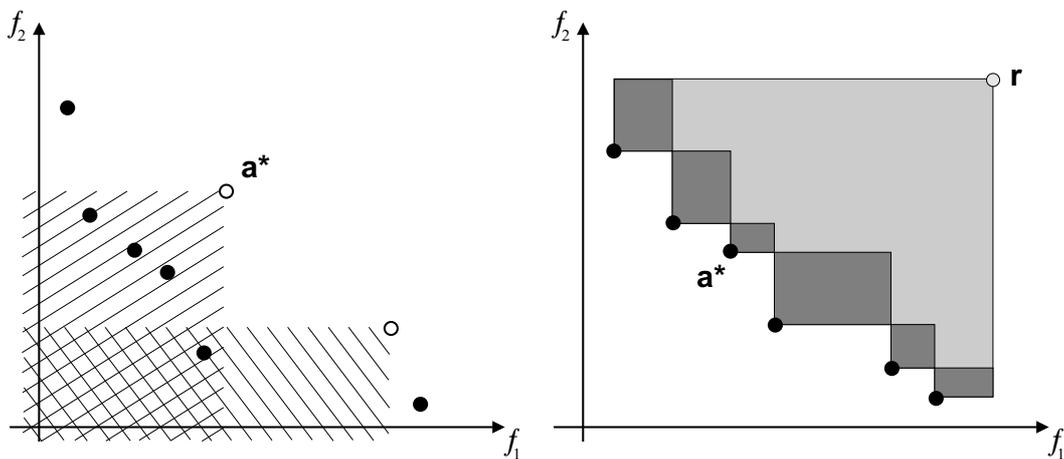


Bild 1: In einem 2-dimensionalen Zielraum von Minimierungsproblemen sind die Werte der Individuen eingezeichnet. Links: Für die beiden dominierten Lösungen sind die Bereiche, in denen dominierende Lösungen liegen, schraffiert. Rechts: Die dunklen Rechtecke zeigen die S-Metrik-Beiträge der Punkte. Der Referenzpunkt \mathbf{r} begrenzt den dominierten Raum.

2.2 Der SMS-EMOA aus Anwendersicht

Der SMS-EMOA zeichnet sich dadurch aus, dass er sehr leistungsfähig ist und außer den Parametern, die für jeden evolutionären Algorithmus spezifiziert werden müssen, keine zusätzlichen benötigt. Seine Anwendung erfordert daher kein tieferes Expertenwissen. Wie bei jedem EMOA müssen zur Bewertung der Lösungen Zielfunktionen definiert werden, die die gewünschten Anforderungen in einen mathematischen Zusammenhang setzen. Die Variationsoperatoren werden problemspezifisch gewählt, in Abhängigkeit der Repräsentation der Lösungen. Für typische Szenarien wie die reellwertige (restringierte) Optimierung oder kombinatorische Probleme sind bewährte Operatoren bekannt. Die Populationsgröße sollte in Abhängigkeit der zur Verfügung stehenden Optimierzeit gewählt werden. Sind Funktionsauswertungen zeitaufwändig, können unter Zeitbeschränkung nur wenige Generationen durchgeführt werden. Die Populationsgröße sollte dann klein sein, damit die Individuen der Population hinreichend oft ausgetauscht werden.

Die Rechenzeit der Operatoren eines EMOA ist normalerweise gegenüber der Zeit für die Funktionsauswertungen vernachlässigbar. Die S-Metrik-Berechnung ist in hoch-dimensionalen Räumen allerdings rechenintensiv, sodass der SMS-EMOA zeitaufwändig ist. Bei zwei oder drei Zielfunktionen ist die Rechenzeit ähnlich wie bei anderen EMOA.

Die Besonderheit des SMS-EMOA besteht darin, dass er bei hoch-dimensionalen Zielfunktionen überhaupt funktioniert. Populäre Verfahren wie NSGA-II oder SPEA2 erreichen selbst auf gängigen Testfunktionen keine Konvergenz gegen die Pareto-Front (vgl. Beume et al. [8]).

2.3 Der SMS-EMOA aus wissenschaftlicher Sicht

Aus der Sicht eines Algorithmikers hat der SMS-EMOA interessante Eigenschaften. Da immer die Folgepopulation mit dem höchsten S-Metrik-Wert ausgewählt wird, ist der S-Metrik-Wert der Population über die Generationen monoton steigend. Da der optimale S-Metrikwert von der Pareto-Front angenommen wird, strebt die Population darauf zu. Das eigentliche Optimierziel stimmt demnach mit der Maximierung der S-Metrik überein und sie erweist sich als adäquate einkriterielle Ersatzzielfunktion.

Die Berechnung der S-Metrik ist eine große algorithmische Herausforderung. Im Rahmen der Entwicklung des SMS-EMOA konnte die Laufzeit der S-Metrik-Berechnung von $O(n^{d-1})$ auf $O(n \log n + n^{d/2})$ für n Punkte im d -dimensionalen Zielraum (vgl. Beume und Rudolph [9]) gesenkt werden. Eine Generation des SMS-EMOA hat ohne die Rechenzeit für die Funktionsauswertung eine Laufzeit von $O(n \log n + n^{(d/2)+1})$.

Das sekundäre Selektionskriterium ist notwendig, weil in mehr-dimensionalen Zielräumen viele Individuen bzgl. der Dominanzrelation unvergleichbar sein können. Ein Punkt in einem d -dimensionalen Raum ist nur mit einem Anteil von $1/2^{d-1}$ des Zielraums vergleichbar. Das sekundäre Selektionskriterium ist bei Standard-EMOA eine Art Diversitätsmaß, das die Verteilung der Punkte optimiert, aber den Fortschritt in Richtung der Pareto-Front kaum berücksichtigt. Das rechenintensive, aber informative Selektionskriterium des SMS-EMOA ist in der Lage, den Optimierprozess kompetent zu steuern.

Der S-Metrikwert wird bzgl. eines Referenzpunktes berechnet. Dieser muss allerdings nicht vom Anwender spezifiziert werden, sondern wird durch eine interne Regelung in jeder Generation neu bestimmt.

3 Studien auf Testfunktionen und Anwendungen in der Flugzeugtechnik

3.1 Akademische Testfunktionen

Für Vergleichsstudien gelten die Familien der ZDT- und DTLZ-Funktionen [10, 11] als anerkannte mehrkriterielle Testfunktionen. Etablierte EMOA wurden auf diesen Funktionen von Deb et al. [12] studiert und die Analyse des SMS-EMOA diesen Studien mit gleicher Parametrisierung nachempfunden. Die Ergebnismengen wurden mit Hilfe der S-Metrik und der Konvergenz-Metrik [12] bewertet.

Auf den zwei-kriteriellen ZDT-Funktionen können alle EMOA als erfolgreich angesehen werden und erzielen ähnliche Ergebnisse. Der SMS-EMOA erreicht auf der Testfamilie insgesamt die besten Ergebnisse (vgl. Emmerich et al. [5]). Die Anzahl der Zielfunktionen ist bei der DTLZ-Familie skalierbar. Mit zunehmender Dimension wird die Überlegenheit des SMS-EMOA deutlicher. Bereits bei vier-kriteriellen Funktionen sind die EMOA NSGA-II [13], SPEA2 [14] und ϵ -MOEA [12] nicht mehr konkurrenzfähig (vgl. Beume et al. [8]). Der ϵ -MOEA ist unter diesen der beste bei steigender Dimension, vorausgesetzt der sensible Parameter ϵ ist mit hoher Genauigkeit passend eingestellt. Der Leistungsabfall des NSGA-II ist besonders deutlich. Er erreicht auf der vier-kriteriellen DTLZ1 nicht einmal die Hälfte des S-Metrikwertes des SMS-EMOA und sein Wert bzgl. des Konvergenzmaßes ist um etwa das 1000-fache schlechter. Die Qualität der Ergebnismenge des SMS-EMOA bleibt bei steigender Dimension relativ gleich. Es werden immer ca. 98% des S-Metrikwertes der Pareto-Front erreicht und die gefundenen Punkte liegen nahezu auf der Pareto-Front.

Das einzige evolutionäre Verfahren, das auch bei hoch-dimensionalen Zielfunktionen konkurrenzfähig zum SMS-EMOA ist, wird derzeit von der Arbeitsgruppe analysiert (vgl. Beume et al. [8]). Es ist ein neuartiger Algorithmus namens MSOPS von Hughes [15], der statt der Pareto-Relation intern verschiedene Aggregationen der Zielfunktionen verwendet. Der Erfolg des Algorithmus hängt stark von den Gewichtungen der Zielfunktionen ab, die vom Anwender spezifiziert werden müssen. Demgegenüber hat der SMS-EMOA den Vorteil, dass er nahezu parameterlos arbeitet.

3.2 Anwendung in der Flugzeugtechnik

In der Flugzeugindustrie kommen Optimierverfahren in vielen Bereichen zur Anwendung. Die Tragflächenoptimierung bietet einfache Anwendungen, wie das Design von Tragflächenprofilen, insbesondere die Rekonstruktion optimaler Profile zu verschiedenen Strömungsbedingungen, die Optimierung von Widerstand und Auftrieb einer Tragfläche oder die Widerstandsminimierung unter verschiedenen Strömungsbedingungen, wozu das vorgestellte Anwendungsproblem zählt. Die drei Zielfunktionen sind die Widerstandsminimierung der Referenztragfläche RAE 2822 unter drei verschiedenen Flugphasen. Die entsprechenden Strömungsbedingungen sind Tabelle 1 zu entnehmen.

Für weitere relevante Kennzahlen (neben dem Widerstandsbeiwert) sind Restriktionen zu beachten, damit sie nicht zu stark von den Werten der Referenztragfläche abweichen.

Tabelle 1: Strömungsbedingungen für die Widerstandsminimierung der Referenztragfläche RAE 2822 im Anwendungsfall Tragflächenoptimierung

	Reiseflug	Abweichung 1	Abweichung 2
Machzahl M	0.734	0.754	0.680
Reynoldszahl Re	$6.5 \cdot 10^6$	$6.2 \cdot 10^6$	$5.7 \cdot 10^6$
Anstellwinkel α	2.8	2.8	1.8
Transition	3%	3%	11%

Der Auftriebsbeiwert muss mit dem der Referenztragfläche übereinstimmen und die maximale Dicke der Referenztragfläche darf nicht überschritten werden. Erlaubt sind Abweichungen des Kippmoments um 2%, der Dicke der Tragfläche um 5%, des Radius der Flügelspitze um 10% und des Winkels der Profilhinterkante um 20%.

Der SMS-EMOA wurde auf der beschriebenen Anwendung mit dem NSGA-II von Deb et al. [13], einem Standardverfahren der evolutionären multikriteriellen Optimierung, verglichen (vgl. Naujoks et al. [16]). Beide Verfahren verwendeten die selben Variationsoperatoren mit identischer Paramterisierung und eine Populationsgröße von 20 Individuen. Fünf Läufe wurden jeweils mit der Referenztragfläche in der initialen Population gestartet und nach 1000 Zielfunktionsauswertungen gestoppt. Die Ergebnisse des NSGA-II sind in Abbildung 2 in der linken Spalte aufgeführt und die des SMS-EMOA in der rechten. Zur Verdeutlichung sind die Ergebnismengen als zwei-dimensionale Projektionen auf die Ebenen $f_3 = 0$, $f_2 = 0$ und $f_1 = 0$ dargestellt.

In den oberen Abbildungen weisen beide Verfahren die geringsten Abweichungen von einander auf. Es lässt sich lediglich eine leichte Streckung der Resultate entlang einer gedachten Geraden feststellen, um die die Lösungen angeordnet sind. Dies führt zu einer besseren Verteilung der Lösungen über den dargestellten Bereich des Suchraums. Allerdings lassen sich daraus noch keine Rückschlüsse für die Leistungsfähigkeit der Verfahren ziehen.

Die Unterschiede zwischen den Verfahren werden deutlich, vergleicht man die mittlere und die untere Zeile der Abbildung 2. Beide Projektionen erscheinen für die jeweiligen Algorithmen recht ähnlich, was mit der beschriebenen Korrelation der Werte bzgl. f_1 und f_2 zusammenhängt. Aufgrund der Ähnlichkeit der Graphiken konzentriert sich die folgende Analyse auf die Beschreibung eines Falls.

Es lässt sich deutlich eine Streckung der Ergebnisse des SMS-EMOA über den dargestellten Bereich des Suchraums erkennen. Ferner sind einzelne Ergebnisse wesentlich näher an der unteren linken Ecke der Graphik positioniert, was einer Verschiebung in Richtung besserer Lösungen entspricht. Insbesondere fallen Lösungen im rechten, unteren Bereich der Graphik für den SMS-EMOA auf, die die Werte der Referenztragfläche dominieren. Dies bedeutet eine Verbesserung der Referenztragfläche bezüglich aller Kriterien, also aller Druckbeiwerte, unter den gegebenen Strömungsbedingungen und unter Erfüllung aller Restriktionen. Eine derartige Verbesserung hinsichtlich aller Kriterien konnte bisher lediglich unter Verwendung von approximierten Zielfunktionsauswertungen erzielt werden (vgl. Emmerich und Naujoks [17]). Die Streckung und die Verschiebung der Front hin zu besseren Ergebnisse bedeuten eine Zunahme des durch die Front überdeckten Hypervolumens. Es kann daher geschlossen werden, dass die gezeigten sehr guten Ergebnisse auf die Verwendung des Hypervolumens als Selektionskriterium zurückzuführen sind.

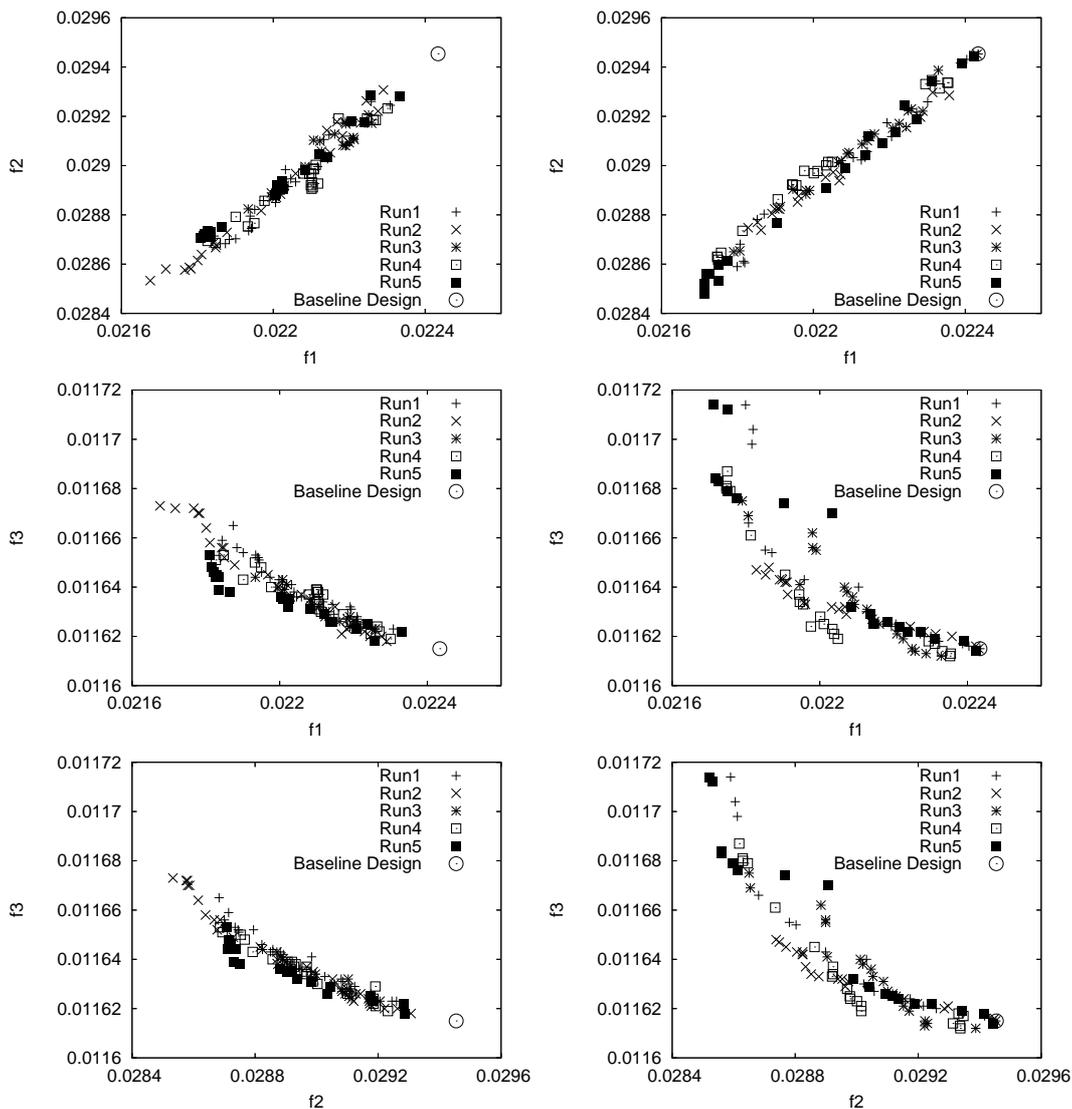


Bild 2: Projektionen der resultierenden Ergebnismengen für die Widerstandsminimierung der Referenztragfläche RAE 2822. Die aufgetragenen Funktionen sind die Widerstandsbeiwerte zu den jeweiligen Strömungsbedingungen aus Tabelle 1. Die Graphiken zeigen fünf Ergebnisse nach jeweils 1000 Zielfunktionsauswertungen mit dem NSGA-II (links) und dem SMS-EMOA (rechts).

4 Zusammenfassung und weitere Forschungsvorhaben

Vor den Studien des SMS-EMOA gab es keinen Pareto-basierten EMOA, der in hoch-dimensionalen Zielräumen annähernd so gut funktioniert wie bei zwei oder drei Zielen. Der SMS-EMOA ist derzeit der einzige Pareto-basierte EMOA, der auf hoch-dimensionalen Testfunktionen die Pareto-Front erreicht und mit einer relativ gleichmäßigen Verteilung repräsentativ abdeckt. Zudem stellte er seine Praxis-Tauglichkeit in prototypischen Optimierungen von z. B. Tragflügeln unter Beweis. Er ist anwenderfreundlich, da er außer den bei der evolutionären Optimierung üblichen Parametern keine weiteren benötigt.

Die Leistungsfähigkeit des SMS-EMOA basiert auf der Steuerung des Optimierprozesses durch die S-Metrik. Die Berechnung der S-Metrik ist in hoch-dimensionalen Zielfunktionsräumen rechenintensiv. Für zwei oder drei-kriterielle Funktionen ist die Laufzeit

mit der üblicher anderer EMOA vergleichbar. Für praktische Anwendungen mit hochdimensionalen Zielfunktionen ist der SMS-EMOA geeignet, wenn die Auswertung der Zielfunktion zeitaufwändig ist, was häufig aufgrund komplexer Simulationen der Fall ist.

Der SMS-EMOA soll zusätzlich beschleunigt werden, indem Informationen zur S-Metrik-Berechnung gespeichert und in den folgenden Generationen verwendet werden. Die S-Metrik-Beiträge sollen dadurch effizient aktualisiert werden. Zudem werden die theoretischen Eigenschaften des SMS-EMOA analysiert, insbesondere die Konvergenzgeschwindigkeit, sowie die Verteilung der Punkte im Zielraum und das Erreichen eines optimalen S-Metrik-Wertes. Durch ein tieferes Verständnis dieser Vorgänge können Empfehlungen ausgesprochen werden, wie die Parameter der evolutionären Optimierung beim SMS-EMOA in Abhängigkeit vom Anwendungsproblems zu wählen sind. Parameterstudien helfen, diese Vermutungen auch auf andere Verfahren zu übertragen. Weitere Anwendungsprobleme sollen Einblick in typische Herausforderungen geben, die SMS-EMOA zu bewältigen hat und die Identifikation typischer Optimierszenarien ermöglichen. Insbesondere werden kombinatorische Optimierprobleme betrachtet.

Demnächst wird der SMS-EMOA als Modul der Optimierumgebung PISA¹ [18] zur Verfügung stehen. Der Source Code des von Beume und Rudolph [9] entwickelten Algorithmus zur S-Metrik-Berechnung wird ebenfalls bald öffentlich zugänglich sein.

Danksagungen

Diese Arbeit wurde unterstützt von der *Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG)* als Teil des *Sonderforschungsbereichs „Computational Intelligence“ (SFB 531)* und im Rahmen des Projekts *„Ein Verfahren zur Optimierung von aus Mehrkomponenten bestehenden Schiffsantrieben“* (Schw 361/15-1).

Literatur

- [1] Deb, K.: *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*. Wiley, Chichester, UK. 2001.
- [2] Coello Coello, C. A.; Van Veldhuizen, D. A.; Lamont, G. B.: *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*. New York: Kluwer Academic Publishers. 2002.
- [3] Zitzler, E.; Thiele, L.: Multiobjective Optimization Using Evolutionary Algorithms—A Comparative Case Study. In: *Parallel Problem Solving from Nature (PPSN V)* (Eiben, A. E.; et al., Hg.), LNCS 1498, S. 292–301. Springer, Berlin. 1998.
- [4] Zitzler, E.; Thiele, L.; Laumanns, M.; Fonseca, C. M.; Grunert da Fonseca, V.: Performance Assessment of Multiobjective Optimizers: An Analysis and Review. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 7 (2003) 2, S. 117–132.

¹PISA - Platform and Programming Language Independent Interface for Search Algorithms, ETH Zürich (www.tik.ee.ethz.ch/pisa/)

- [5] Emmerich, M.; Beume, N.; Naujoks, B.: An EMO algorithm using the hypervolume measure as selection criterion. In: *Evolutionary Multi-Criterion Optimization: 3rd Int'l Conf. (EMO 2005)* (Coello Coello, C. A.; et al., Hg.), S. 62–76. Springer, Berlin. 2005.
- [6] Beume, N.; Naujoks, B.; Emmerich, M.: SMS-EMOA: Multiobjective selection based on dominated hypervolume. *European Journal of Operational Research* (2006). (Im Druck).
- [7] Bäck, T.; Fogel, D. B.; Michalewicz, Z. (Hg.): *Handbook of Evolutionary Computation*. Bristol, United Kingdom: IOP Publishing and Oxford University Press. 1997.
- [8] Beume, N.; Naujoks, B.; Wagner, T.: Pareto-based, Indicator-based, and Aggregation Methods in Many-objective Optimisation. Interner Bericht des Sonderforschungsbereichs 531 *Computational Intelligence*, Universität Dortmund. 2006.
- [9] Beume, N.; Rudolph, G.: Faster S-Metric Calculation by Considering Dominated Hypervolume as Klee's Measure Problem. Interner Bericht des Sonderforschungsbereichs 531 *Computational Intelligence* CI–216/06, Universität Dortmund. 2006.
- [10] Zitzler, E.; Deb, K.; Thiele, L.: Comparison of Multiobjective Evolutionary Algorithms: Empirical Results. *Evolutionary Computation* 8 (2000) 2, S. 173–195.
- [11] Deb, K.; Thiele, L.; Laumanns, M.; Zitzler, E.: Scalable Multi-Objective Optimization Test Problems. In: *Proc. of the 2002 Congress on Evolutionary Computation (CEC 2002)*, Bd. 1, S. 825–830. IEEE Press, Piscataway NJ. 2002.
- [12] Deb, K.; Mohan, M.; Mishra, S.: Towards a Quick Computation of Well-Spread Pareto-Optimal Solutions. In: *Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Second International Conference, EMO 2003* (Fonseca, C. M.; Fleming, P. J.; Zitzler, E.; Deb, K.; Thiele, L., Hg.), S. 222–236. Faro, Portugal: Springer. Lecture Notes in Computer Science. Volume 2632. 2003.
- [13] Deb, K.; Pratap, A.; Agarwal, S.; Meyarivan, T.: A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA–II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 6 (2002) 2, S. 182–197.
- [14] Zitzler, E.; Laumanns, M.; Thiele, L.: SPEA2: Improving the Strength Pareto Evolutionary Algorithm for Multiobjective Optimization. In: *Evolutionary Methods for Design, Optimisation, and Control*, S. 95–100. Barcelona, Spain: CIMNE. 2002.
- [15] Hughes, E. J.: Evolutionary Many-Objective Optimisation: Many Once or One Many? In: *Evolutionary Computation 'Congress (CEC'05), Edinburgh, UK*, Bd. 1, S. 222–227. IEEE Press, Piscataway NJ. 2005.
- [16] Naujoks, B.; Beume, N.; Emmerich, M.: Multi-objective optimisation using S-metric selection: Application to three-dimensional solution spaces. In: *Evolutionary Computation Congress (CEC'05), Edinburgh, UK*, Bd. 2, S. 1282–1289. Piscataway NJ: IEEE Press. 2005.
- [17] Emmerich, M.; Naujoks, B.: Metamodel-assisted multi-objective optimisation with implicit constraints and their application in airfoil design. In: *Int'l Conf. ERCOFTAC 2004*. CIMNE, Barcelona, Spain (CD-ROM). 2004.

- [18] Bleuler, S.; Laumanns, M.; Thiele, L.; Zitzler, E.: PISA — A Platform and Programming Language Independent Interface for Search Algorithms. In: *Evolutionary Multi-Criterion Optimization, 2nd Int'l Conf. (EMO 2003)* (Fonseca, C. M.; et al., Hg.), LNCS 2632, S. 494 – 508. Springer, Berlin. 2003.