UA RUHR

Algorithmen auf Sequenzen

Volltext-Indexdatenstrukturen: Suffixarrays

Sven Rahmann

Genominformatik
Universitätsklinikum Essen
Universität Duisburg-Essen
Universitätsallianz Ruhr

Motivation für Suffixarrays

- Speicherverbrauch für Suffixbaum hoch ($\mathcal{O}(n) \approx 20n$ Bytes)

Motivation für Suffixarrays

- Speicherverbrauch für Suffixbaum hoch ($\mathcal{O}(n) \approx 20n$ Bytes)
- Bei alphabetisch sortierten ausgehenden Kanten:
  Sequenz der Blattnummern
  = Startpositionen der lexikographisch sortierten Suffixe
- Array: $\mathcal{O}(4n)$ Bytes (32-bit-Zahlen)
- erlaubt binäre Suche nach Mustern in $\mathcal{O}(m \log n)$ Zeit

Motivation für Suffixarrays

- Speicherverbrauch für Suffixbaum hoch ($\mathcal{O}(n) \approx 20n$ Bytes)
- Bei alphabetisch sortierten ausgehenden Kanten:
  Sequenz der Blattnummern
  = Startpositionen der lexikographisch sortierten Suffixe
- Array: $\mathcal{O}(4n)$ Bytes (32-bit-Zahlen)
- erlaubt binäre Suche nach Mustern in $\mathcal{O}(m \log n)$ Zeit
- Abbilden der Baumstruktur mit zusätzlichen Arrays
- Manche Anwendungen bekommen direkt cache-effiziente Algorithmen

Beispiel eines Suffixarrays

Notation: p indiziert Textpositionen, r Ränge.
Im Suffixarray ist $pos[r]$ die Startposition des lexikographisch r-t kleinsten Suffix.

$p =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$T =$	m	i	i	s	s	i	s	s	i	p	p	i	i	$

$r =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$pos =$	13	12	11	1	8	5	2	0	10	9	7	4	6	3

Beispiel eines Suffixarrays

Notation: p indiziert Textpositionen, r Ränge.
Im Suffixarray ist $pos[r]$ die Startposition des lexikographisch r-t kleinsten Suffix.

$p =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$T =$	m	i	i	s	s	i	s	s	i	p	p	i	i	$

$r =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$pos =$	13	12	11	1	8	5	2	0	10	9	7	4	6	3
	$	i						m	p		s			

Aufteilung der Suffixe in “Buckets” gemäß Startbuchstaben.

Konstruktion eines Suffixarrays

1. aus dem Suffixbaum durch Ablesen in $\mathcal{O}(n)$ Zeit
   Nachteil: hoher Speicherverbrauch für Baumkonstruktion

Konstruktion eines Suffixarrays

UA RUHR

1. aus dem Suffixbaum durch Ablesen in $\mathcal{O}(n)$ Zeit
   Nachteil: hoher Speicherverbrauch für Baumkonstruktion
2. direkt durch naives Sortieren

```
1 def build_suffixarray_naive(T):
2     n = len(T)
3     suffixes = lambda p: T[p:]
4     return sorted(range(n), key=suffixes)
```

Laufzeit:

Konstruktion eines Suffixarrays

UA RUHR

1. aus dem Suffixbaum durch Ablesen in $\mathcal{O}(n)$ Zeit
   Nachteil: hoher Speicherverbrauch für Baumkonstruktion
2. direkt durch naives Sortieren

```
1 def build_suffixarray_naive(T):
2     n = len(T)
3     suffixes = lambda p: T[p:]
4     return sorted(range(n), key=suffixes)
```

Laufzeit: $\mathcal{O}(n^2 \log n)$

Konstruktion eines Suffixarrays

UA RUHR

1. aus dem Suffixbaum durch Ablesen in $\mathcal{O}(n)$ Zeit
   Nachteil: hoher Speicherverbrauch für Baumkonstruktion
2. direkt durch naives Sortieren

```
1 def build_suffixarray_naive(T):
2     n = len(T)
3     suffixes = lambda p: T[p:]
4     return sorted(range(n), key=suffixes)
```

   Laufzeit: $\mathcal{O}(n^2 \log n)$

3. direkt durch Linearzeitalgorithmus in $\mathcal{O}(n)$ Zeit
   hier: Suffix Array Induced Sorting (SAIS) Algorithmus

Typen von Positionen

Bei Teilstrings der Form $T_p \geq T_{p+1} \geq \cdots \geq T_q$ (z.B.: ...dccbba...) kommen die Positionen in umgekehrter Reihenfolge im Suffixarray als Teilsequenz vor, also $q \ldots (p+2) \ldots (p+1) \ldots p \ldots$

Typen von Positionen

Bei Teilstrings der Form $T_p \geq T_{p+1} \geq \cdots \geq T_q$ (z.B.: ...dccbba...) kommen die Positionen in umgekehrter Reihenfolge im Suffixarray als Teilsequenz vor, also $q \ldots (p+2) \ldots (p+1) \ldots p \ldots$

Bei Teilstrings der Form $T_p \leq T_{p+1} \leq \cdots \leq T_q$ (z.B.: ...abbccd...) kommen die Positionen in der selben Reihenfolge im Suffixarray als Teilsequenz vor, also z.B.: $p \ldots (p+1) \ldots (p+2) \ldots q \ldots$

Typen von Positionen

Bei Teilstrings der Form $T_p \geq T_{p+1} \geq \cdots \geq T_q$ (z.B.: ...dccbba...) kommen die Positionen in umgekehrter Reihenfolge im Suffixarray als Teilsequenz vor, also $q \ldots (p+2) \ldots (p+1) \ldots p \ldots$

Bei Teilstrings der Form $T_p \leq T_{p+1} \leq \cdots \leq T_q$ (z.B.: ...abbccd...) kommen die Positionen in der selben Reihenfolge im Suffixarray als Teilsequenz vor, also z.B.: $p \ldots (p+1) \ldots (p+2) \ldots q \ldots$

Definition (L-type-Position, S-type-Position)

Position p heisst vom Typ L (*L-type*; larger), wenn $T[p:] > T[(p+1):]$.
(d.h. $T[p] > T[p+1]$, oder bei Gleichheit war schon Position $p+1$ L-type)

Typen von Positionen

Bei Teilstrings der Form $T_p \geq T_{p+1} \geq \cdots \geq T_q$ (z.B.: ...dccbba...) kommen die Positionen in umgekehrter Reihenfolge im Suffixarray als Teilsequenz vor, also $q \ldots (p+2) \ldots (p+1) \ldots p \ldots$

Bei Teilstrings der Form $T_p \leq T_{p+1} \leq \cdots \leq T_q$ (z.B.: ...abbccd...) kommen die Positionen in der selben Reihenfolge im Suffixarray als Teilsequenz vor, also z.B.: $p \ldots (p+1) \ldots (p+2) \ldots q \ldots$

Definition (L-type-Position, S-type-Position)

Position p heisst vom Typ L (*L-type*; larger), wenn $T[p:] > T[(p+1):]$.
(d.h. $T[p] > T[p+1]$, oder bei Gleichheit war schon Position $p+1$ L-type)
Position p heisst vom Typ S (*S-type*; smaller), wenn $T[p:] < T[(p+1):]$.
Der Wächter \$ wird als S-type definiert.

LMS-type

UA RUHR

Definition (LMS-type Position)

Position p heißt *LMS-Type* (leftmost-smaller),
wenn p eine S-type Position ist und $(p-1)$ eine L-type Position ist.

LMS-type

UA RUHR

Definition (LMS-type Position)

Position p heißt *LMS-Type* (leftmost-smaller),
wenn p eine S-type Position ist und $(p-1)$ eine L-type Position ist.

$T =$	`miississippii$`
Type :	`LSSLLSLLSLLLLS`
LMS :	`  *   *   *    *`

Die LMS-type Positionen stellen jeweils das Ende einer absteigenden Reihenfolge dar.

LMS-type

UA RUHR

Definition (LMS-type Position)

Position p heißt *LMS-Type* (leftmost-smaller),
wenn p eine S-type Position ist und $(p-1)$ eine L-type Position ist.

$T =$	`miississippii$`
Type :	`LSSLLSLLSLLLLS`
LMS :	`  *   *   *    *`

Die LMS-type Positionen stellen jeweils das Ende einer absteigenden Reihenfolge dar.

Definition (LMS-Suffix, LMS-Substring)

Ein Suffix $T[p:]$ heißt *LMS-Suffix*, wenn p vom LMS-Typ ist.
Ein Substring $T[p..q]$ heißt *LMS-Substring*, wenn p und q LMS-Positionen sind, aber keine Position dazwischen. Der Wächter gilt als einbuchstabiger LMS-Substring.

Grundideen des SAIS-Algorithmus

Links-Induktions-Scan:

1. Initialisiere ein Suffixarray der Länge n mit jeweils -1 (undefiniert).
2. Sortiere alle LMS-Suffixe (rekursiv, später)
3. Stelle die sortierten LMS-Suffixe jeweils ans Ende ihrer Buckets.

Grundideen des SAIS-Algorithmus

Links-Induktions-Scan:

1. Initialisiere ein Suffixarray der Länge n mit jeweils -1 (undefiniert).
2. Sortiere alle LMS-Suffixe (rekursiv, später)
3. Stelle die sortierten LMS-Suffixe jeweils ans Ende ihrer Buckets.
4. Scane das Suffixarray *pos* von links nach rechts mit Index r
5. Für $pos[r] \neq -1$:
   Ist $p := pos[r] - 1$ L-type, füge p an vorderste freie Stelle seines Buckets ein.

Grundideen des SAIS-Algorithmus

Links-Induktions-Scan:

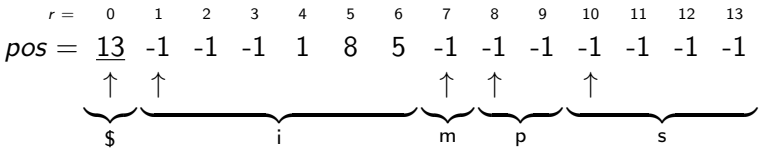
1. Initialisiere ein Suffixarray der Länge n mit jeweils -1 (undefiniert).
2. Sortiere alle LMS-Suffixe (rekursiv, später)
3. Stelle die sortierten LMS-Suffixe jeweils ans Ende ihrer Buckets.
4. Scane das Suffixarray pos von links nach rechts mit Index r
5. Für $pos[r] \neq -1$:
   Ist $p := pos[r] - 1$ L-type, füge p an vorderste freie Stelle seines Buckets ein.

Lemma

Alle L-type Positionen werden durch einen Links-Induktions-Scan an ihre korrekte Position im Suffixarray sortiert.

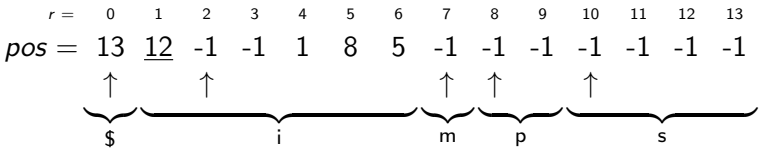
Links-Induktions-Scan

```
                    0         1
                    01234567890123
T =                 miississippii$
Type :              LSSLLSLLSLLLLS
LMS :                *   *   *    *
seq =                [13, 1, 8, 5]
```



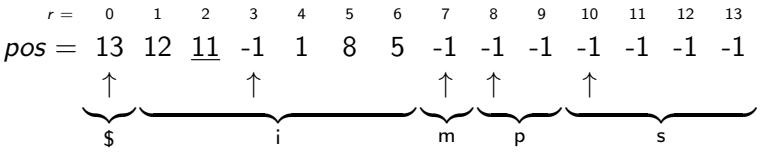
Links-Induktions-Scan

```
                    0         1
                    01234567890123
T =                 miississippii$
Type :              LSSLLSLLSLLLLS
LMS :                *   *   *    *
seq =                [13, 1, 8, 5]
```



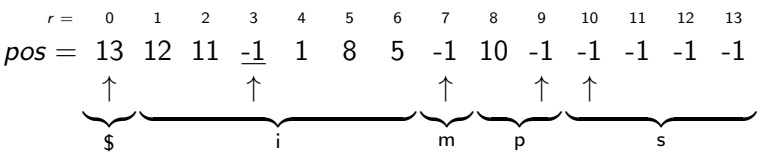
Links-Induktions-Scan

```
                    0         1
                    01234567890123
T =                 miississippii$
Type :              LSSLLSLLSLLLLS
LMS :                *   *   *    *
seq =                [13, 1, 8, 5]
```



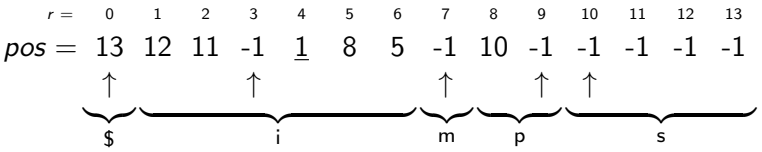
Links-Induktions-Scan

```
                    0         1
                    01234567890123
T =                 miississippii$
Type :              LSSLLSLLSLLLLS
LMS :                *   *   *    *
seq =                [13, 1, 8, 5]
```



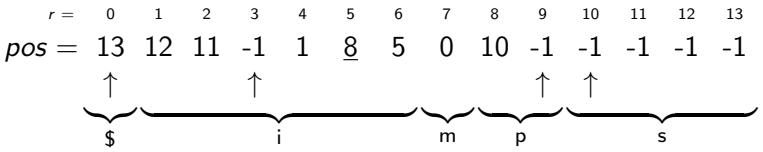
Links-Induktions-Scan

```
                    0         1
                    01234567890123
T =                 miississippii$
Type :              LSSLLSLLSLLLLS
LMS :                *   *   *    *
seq =                [13, 1, 8, 5]
```



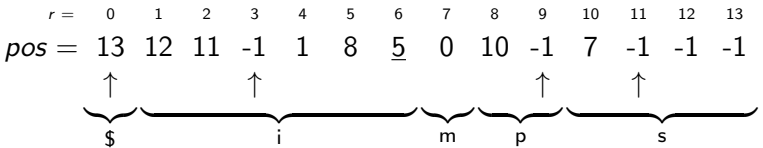
Links-Induktions-Scan

```
                    0         1
                    01234567890123
T =                 miississippii$
Type :              LSSLLSLLSLLLLS
LMS :                *   *   *    *
seq =                [13, 1, 8, 5]
```



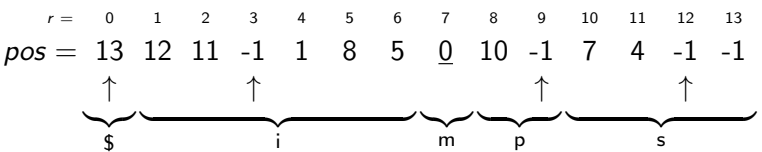
Links-Induktions-Scan

```
                    0         1
                    01234567890123
T =                 miississippii$
Type :              LSSLLSLLSLLLLS
LMS :                *   *   *    *
seq =                [13, 1, 8, 5]
```



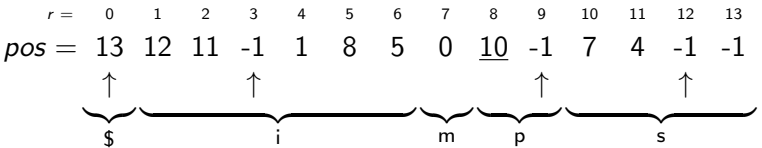
Links-Induktions-Scan

```
                    0         1
                    01234567890123
T =                 miississippii$
Type :              LSSLLSLLSLLLLS
LMS :                *   *   *    *
seq =                [13, 1, 8, 5]
```



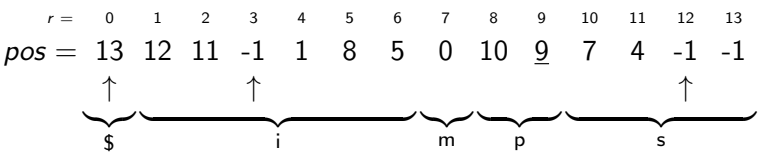
Links-Induktions-Scan

```
                    0         1
                    01234567890123
T =                 miississippii$
Type :              LSSLLSLLSLLLLS
LMS :                *   *   *    *
seq =                [13, 1, 8, 5]
```



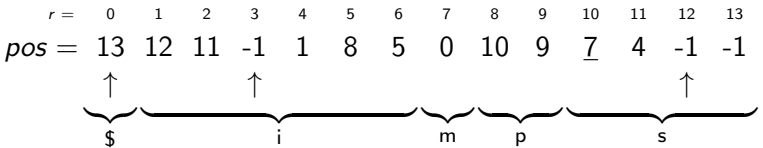
Links-Induktions-Scan

```
                    0         1
                    01234567890123
T =                 miississippii$
Type :              LSSLLSLLSLLLLS
LMS :                *   *   *    *
seq =                [13, 1, 8, 5]
```



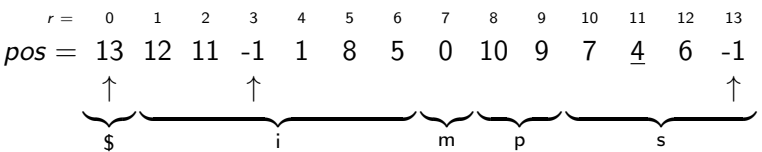
Links-Induktions-Scan

```
                    0         1
                    01234567890123
T =                 miississippii$
Type :              LSSLLSLLSLLLLS
LMS :                *   *   *    *
seq =                [13, 1, 8, 5]
```



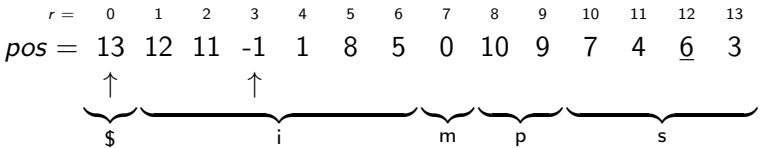
Links-Induktions-Scan

```
                    0         1
                    01234567890123
T =                 miississippii$
Type :              LSSLLSLLSLLLLS
LMS :                *   *   *    *
seq =                [13, 1, 8, 5]
```



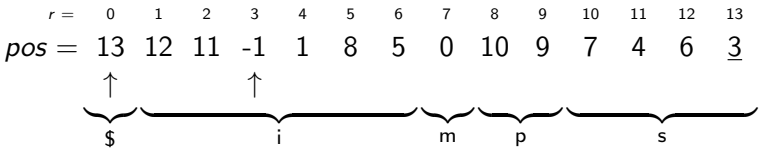
Links-Induktions-Scan

```
                    0         1
                    01234567890123
T =                 miississippii$
Type :              LSSLLSLLSLLLLS
LMS :                *   *   *    *
seq =                [13, 1, 8, 5]
```



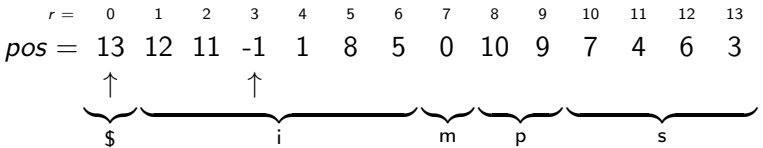
Links-Induktions-Scan

```
                    0         1
                    01234567890123
T =                 miississippii$
Type :              LSSLLSLLSLLLLS
LMS :                *   *   *    *
seq =                [13, 1, 8, 5]
```



Links-Induktions-Scan

```
                    0         1
                    01234567890123
T =                 miississippii$
Type :              LSSLLSLLSLLLLS
LMS :                *   *   *    *
seq =                [13, 1, 8, 5]
```



Beweis des Links-Induktions-Scan-Lemmas

UA RUHR

Lemma

Alle L-type Positionen werden durch einen Links-Induktions-Scan an ihre korrekte Position im Suffixarray sortiert.

Beweis des Links-Induktions-Scan-Lemmas

UA RUHR

Lemma

Alle L-type Positionen werden durch einen Links-Induktions-Scan an ihre korrekte Position im Suffixarray sortiert.

- In jedem Bucket stehen L-type Positionen stehen **vor** S-type Positionen.
- L-type-Positionen können nur von LMS-type- oder anderen L-type-Positionen eingetragen werden.
- LMS-Positionen (auch Wächterposition) ist korrekt eingetragen.

Beweis des Links-Induktions-Scan-Lemmas

UA RUHR

Lemma

Alle L-type Positionen werden durch einen Links-Induktions-Scan an ihre korrekte Position im Suffixarray sortiert.

- In jedem Bucket stehen L-type Positionen stehen **vor** S-type Positionen.
- L-type-Positionen können nur von LMS-type- oder anderen L-type-Positionen eingetragen werden.
- LMS-Positionen (auch Wächterposition) ist korrekt eingetragen.
- Steht Textposition p an Index r von pos und ist $p-1$ eine Typ-L-Position, dann steht $p-1$ an einem Index $r' > r$.

Beweis des Links-Induktions-Scan-Lemmas

UA RUHR

Lemma

Alle L-type Positionen werden durch einen Links-Induktions-Scan an ihre korrekte Position im Suffixarray sortiert.

- In jedem Bucket stehen L-type Positionen stehen **vor** S-type Positionen.
- L-type-Positionen können nur von LMS-type- oder anderen L-type-Positionen eingetragen werden.
- LMS-Positionen (auch Wächterposition) ist korrekt eingetragen.
- Steht Textposition p an Index r von pos und ist $p-1$ eine Typ-L-Position, dann steht $p-1$ an einem Index $r' > r$.
- Angenommen, Position q wird hinter einer Position p in dasselbe Bucket eingetragen, aber $T[p:] > T[q:]$. Dann ist aber $T[p] = T[q]$; die Fehlsortierung hätte also schon für (bereits eingetragene) $p+1$ und $q+1$ eintreten müssen. $\lightning$

Grundideen des SAIS-Algorithmus

Rechts-Induktions-Scan:

1. Annahme: Alle L-type Positionen sind im Suffixarray korrekt eingetragen.
2. Scane das Suffixarray von rechts nach links mit Laufindex r
3. Ist $p := pos[r] - 1$ S-type, schreibe p an die hinterste freie Stelle seines Buckets.

Grundideen des SAIS-Algorithmus

Rechts-Induktions-Scan:

1. Annahme: Alle L-type Positionen sind im Suffixarray korrekt eingetragen.
2. Scane das Suffixarray von rechts nach links mit Laufindex r
3. Ist $p := pos[r] - 1$ S-type, schreibe p an die hinterste freie Stelle seines Buckets.

Lemma

Wenn alle L-Type Zeichen an korrekter Position im Suffixarray stehen, dann werden alle S-Type Zeichen durch einen Rechts-Induktions-Scan an ihre korrekte Position im Suffixarray sortiert.

Rechts-Induktions-Scan

								0							1
								0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
$T =$								m	i	i	s	s	i	s	s	i	p	p	i	i	$
Type :								L	S	S	L	L	S	L	L	S	L	L	L	L	S
LMS :									*			*			*						*

$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$pos =$	13	12	11	-1	1	8	5	0	10	9	7	4	6	3

$ | i | m | p | s

Rechts-Induktions-Scan

							0							1
							0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
$T =$							m	i	i	s	s	i	s	s	i	p	p	i	i	$
Type :							L	S	S	L	L	S	L	L	S	L	L	L	L	S
LMS :								*			*			*						*

$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$pos =$	13	12	11	-1	1	8	2	0	10	9	7	4	6	3
	↑					↑		↑		↑				↑
	$				i			m		p			s	

Rechts-Induktions-Scan

								0							1
								0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
$T =$								m	i	i	s	s	i	s	s	i	p	p	i	i	$
Type :								L	S	S	L	L	S	L	L	S	L	L	L	L	S
LMS :									*			*			*						*

$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$pos =$	13	12	11	-1	1	5	2	0	10	9	7	4	6	3

$ i m p s

Rechts-Induktions-Scan

							0							1
							0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
$T =$							m	i	i	s	s	i	s	s	i	p	p	i	i	$
Type :							L	S	S	L	L	S	L	L	S	L	L	L	L	S
LMS :								*			*			*						*

$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$pos =$	13	12	11	-1	1	5	2	0	10	9	7	4	6	3

$ | i | m | p | s

Rechts-Induktions-Scan

							0							1
							0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
$T =$							m	i	i	s	s	i	s	s	i	p	p	i	i	$
Type :							L	S	S	L	L	S	L	L	S	L	L	L	L	S
LMS :								*			*			*						*

$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$pos =$	13	12	11	-1	1	5	2	0	10	9	7	4	6	3
	↑				↑			↑		↑				↑
	$				i			m		p				s

Rechts-Induktions-Scan

	0 1
	01234567890123
$T =$	miississippii$
Type :	LSSLLSLLSLLLLS
LMS :	* * * *

$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$pos =$	13	12	11	-1	8	5	2	0	10	9	7	4	6	3

$ i m p s

Rechts-Induktions-Scan

							0						1	
							0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
$T =$							m	i	i	s	s	i	s	s	i	p	p	i	i	$
Type :							L	S	S	L	L	S	L	L	S	L	L	L	L	S
LMS :								*			*			*						*

$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$pos =$	13	12	11	-1	8	5	2	0	10	9	7	4	6	3
	↑			↑				↑		↑				↑
	$			i				m		p				s

Rechts-Induktions-Scan

							0							1
							0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
$T =$							m	i	i	s	s	i	s	s	i	p	p	i	i	$
Type :							L	S	S	L	L	S	L	L	S	L	L	L	L	S
LMS :								*			*			*						*

$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$pos =$	13	12	11	-1	8	5	2	0	10	9	7	4	6	3
	↑			↑				↑		↑				↑
	$			i				m		p				s

Rechts-Induktions-Scan

							0							1
							0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
$T =$							m	i	i	s	s	i	s	s	i	p	p	i	i	$
Type :							L	S	S	L	L	S	L	L	S	L	L	L	L	S
LMS :								*			*			*						*

$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$pos =$	13	12	11	1	8	5	2	0	10	9	7	4	6	3
	↑		↑					↑		↑				↑
	$				i			m		p			s	

Rechts-Induktions-Scan

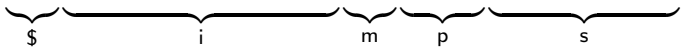
							0							1
							0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
$T =$							m	i	i	s	s	i	s	s	i	p	p	i	i	$
Type :							L	S	S	L	L	S	L	L	S	L	L	L	L	S
LMS :								*			*			*						*

$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$pos =$	13	12	11	1	8	5	2	0	10	9	7	4	6	3
	↑		↑					↑		↑				↑
	$				i			m		p				s

Rechts-Induktions-Scan

	0	1												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
$T =$	m	i	i	s	s	i	s	s	i	p	p	i	i	$
Type :	L	S	S	L	L	S	L	L	S	L	L	L	L	S
LMS :			*			*			*					*

$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$pos =$	13	12	11	1	8	5	2	0	10	9	7	4	6	3



Rechts-Induktions-Scan

							0							1
							0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
$T =$							m	i	i	s	s	i	s	s	i	p	p	i	i	$
Type :							L	S	S	L	L	S	L	L	S	L	L	L	L	S
LMS :								*			*			*						*

$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$pos =$	13	12	11	1	8	5	2	0	10	9	7	4	6	3
	↑		↑					↑		↑				↑
	$				i			m		p			s	

Rechts-Induktions-Scan

							0							1
							0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
$T =$							m	i	i	s	s	i	s	s	i	p	p	i	i	$
Type :							L	S	S	L	L	S	L	L	S	L	L	L	L	S
LMS :								*			*			*						*

$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$pos =$	13	12	11	1	8	5	2	0	10	9	7	4	6	3
	↑		↑					↑		↑				↑
	$				i			m		p				s

Rechts-Induktions-Scan

							0							1
							0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
$T =$							m	i	i	s	s	i	s	s	i	p	p	i	i	$
Type :							L	S	S	L	L	S	L	L	S	L	L	L	L	S
LMS :								*			*			*						*

$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$pos =$	13	12	11	1	8	5	2	0	10	9	7	4	6	3
	↑		↑					↑		↑				↑
	$			i				m		p			s	

Rechts-Induktions-Scan

							0						1	
							0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
$T =$							m	i	i	s	s	i	s	s	i	p	p	i	i	$
Type :							L	S	S	L	L	S	L	L	S	L	L	L	L	S
LMS :								*			*			*						*

$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$pos =$	13	12	11	1	8	5	2	0	10	9	7	4	6	3
	↑		↑					↑		↑				↑
	$			i				m		p			s	

Beweis für Korrektheit des Rechts-Induktions-Scans ist analog zum Vorherigen.

Erkenntnisse

- Sofern die sortierte Reihenfolge der LMS-Suffixe bekannt ist, kann man das vollständige Suffixarray korrekt induzieren.
- Die Laufzeit beträgt hierbei $\mathcal{O}(n)$.

Erkenntnisse

- Sofern die sortierte Reihenfolge der LMS-Suffixe bekannt ist, kann man das vollständige Suffixarray korrekt induzieren.
- Die Laufzeit beträgt hierbei $\mathcal{O}(n)$.
  - Das einmalige Zählen der Buchstaben dauert $\mathcal{O}(n)$.
  - Das erstellen der Bucketanfangs- bzw. Endpositionen dauert $\mathcal{O}(|\Sigma|)$.
  - Der Links-Induktions-Scan dauert $\mathcal{O}(n)$.
  - Der Rechts-Induktions-Scan dauert $\mathcal{O}(n)$.

Erkenntnisse

- Sofern die sortierte Reihenfolge der LMS-Suffixe bekannt ist, kann man das vollständige Suffixarray korrekt induzieren.
- Die Laufzeit beträgt hierbei $\mathcal{O}(n)$.
  - Das einmalige Zählen der Buchstaben dauert $\mathcal{O}(n)$.
  - Das erstellen der Bucketanfangs- bzw. Endpositionen dauert $\mathcal{O}(|\Sigma|)$.
  - Der Links-Induktions-Scan dauert $\mathcal{O}(n)$.
  - Der Rechts-Induktions-Scan dauert $\mathcal{O}(n)$.
- Wie kann man aber effizient die LMS-Suffixe sortieren?

Reduktion des Problems

UA RUHR

- LMS-Suffixe bestehen aus LMS-Substrings.
- Sortiere LMS-Substrings und stelle die durch ihren Rang in der sortierten Reihenfolge dar.

$$
\begin{aligned}
T &= \texttt{miississippii\$} \\
LMS: &\quad \texttt{*} \quad \texttt{*} \quad \texttt{*} \quad \texttt{*} \\
T_{\mathrm{R}} &= \texttt{[1, 3, 2, 0]}
\end{aligned}
$$

- T_{R} repräsentiert LMS-Suffixe von T in derselben Reihenfolge.
- Wenn alle LMS-Substrings verschieden sind, sind wir "fertig".
- Wenn es wiederholte Ränge gibt (gleiche LMS-Substrings), müssen wir wieder ein Suffixsortier-Problem lösen (Suffixarray berechnen), aber der String ist kürzer ... und zwar höchstens halb so lang wie vorher!

Reduktion des Problems

- LMS-Suffixe bestehen aus LMS-Substrings.
- Sortiere LMS-Substrings und stelle die durch ihren Rang in der sortierten Reihenfolge dar.

$$
\begin{aligned}
T &= \texttt{miississippii\$} \\
LMS: &\quad \texttt{*} \quad \texttt{*} \quad \texttt{*} \quad \texttt{*} \\
T_{\mathrm{R}} &= \texttt{[1, 3, 2, 0]}
\end{aligned}
$$

- T_{R} repräsentiert LMS-Suffixe von T in derselben Reihenfolge.
- Wenn alle LMS-Substrings verschieden sind, sind wir "fertig".
- Wenn es wiederholte Ränge gibt (gleiche LMS-Substrings), müssen wir wieder ein Suffixsortier-Problem lösen (Suffixarray berechnen), aber der String ist kürzer

Reduktion des Problems

- LMS-Suffixe bestehen aus LMS-Substrings.
- Sortiere LMS-Substrings und stelle die durch ihren Rang in der sortierten Reihenfolge dar.

$$
\begin{aligned}
T &= \texttt{miississippii\$} \\
\mathit{LMS}: &\quad \texttt{*} \quad \texttt{*} \quad \texttt{*} \quad \texttt{*} \\
T_{\mathrm{R}} &= \texttt{[1, 3, 2, 0]}
\end{aligned}
$$

- T_{R} repräsentiert LMS-Suffixe von T in derselben Reihenfolge.
- Wenn alle LMS-Substrings verschieden sind, sind wir "fertig".
- Wenn es wiederholte Ränge gibt (gleiche LMS-Substrings), müssen wir wieder ein Suffixsortier-Problem lösen (Suffixarray berechnen), aber der String ist kürzer ... und zwar höchstens halb so lang wie vorher!

Details der Reduktion

1. Sortiere LMS-Substrings (siehe später)
2. Beginne mit Rang 0 (Wächter ist stets LMS-Substring)
3. Vergleiche nächsten LMS-Substring in sortierter Reihenfolge mit vorigem:
   Zwei LMS-Substrings haben genau dann den gleichen Rang, wenn sie dieselbe Länge, dieselbe Zeichensequenz und Positionstypensequenz haben.

Details der Reduktion

1. Sortiere LMS-Substrings (siehe später)
2. Beginne mit Rang 0 (Wächter ist stets LMS-Substring)
3. Vergleiche nächsten LMS-Substring in sortierter Reihenfolge mit vorigem:
   Zwei LMS-Substrings haben genau dann den gleichen Rang, wenn sie dieselbe Länge, dieselbe Zeichensequenz und Positionstypensequenz haben.

Die Rangsequenz ist höchstens halb so lang wie der Ausgangstext.

Details der Reduktion

1. Sortiere LMS-Substrings (siehe später)
2. Beginne mit Rang 0 (Wächter ist stets LMS-Substring)
3. Vergleiche nächsten LMS-Substring in sortierter Reihenfolge mit vorigem:
   Zwei LMS-Substrings haben genau dann den gleichen Rang, wenn sie dieselbe Länge, dieselbe Zeichensequenz und Positionstypensequenz haben.

Die Rangsequenz ist höchstens halb so lang wie der Ausgangstext.

- LMS-Teilstring hat die Typform S^+L^+S, wobei das letzte S gleichzeitig Beginn des nächsten LMS-Teilstrings ist.
- Es werden immer mindestens zwei Zeichen (SL) zu einem Rang reduziert.

Details der Reduktion

1. Sortiere LMS-Substrings (siehe später)
2. Beginne mit Rang 0 (Wächter ist stets LMS-Substring)
3. Vergleiche nächsten LMS-Substring in sortierter Reihenfolge mit vorigem:
   Zwei LMS-Substrings haben genau dann den gleichen Rang, wenn sie dieselbe Länge, dieselbe Zeichensequenz und Positionstypensequenz haben.

Die Rangsequenz ist höchstens halb so lang wie der Ausgangstext.

- LMS-Teilstring hat die Typform S^+L^+S, wobei das letzte S gleichzeitig Beginn des nächsten LMS-Teilstrings ist.
- Es werden immer mindestens zwei Zeichen (SL) zu einem Rang reduziert.

Der Wächter bleibt in seinen Eigenschaften (lexikographisch kleinster LMS-Teilstring) bei der Reduktion erhalten.

Detalis der Reduktion: Reduziertes Suffixarray

Gibt es gleiche Ränge, erfolgt ein rekursiver Aufruf.

Sind alle Ränge verschieden, kann durch einmaliges Durchlaufen von T_R das Suffixarray der LMS-Suffixe pos_R direkt bestimmt werden (inverse Permutation): $pos_R[T_R[i]] := i$ für $0 \leq i < |T_R|$.

Detalis der Reduktion: Reduziertes Suffixarray

Gibt es gleiche Ränge, erfolgt ein rekursiver Aufruf.

Sind alle Ränge verschieden, kann durch einmaliges Durchlaufen von T_R das Suffixarray der LMS-Suffixe pos_R direkt bestimmt werden (inverse Permutation): $pos_R[T_R[i]] := i$ für $0 \leq i < |T_R|$.

	0 1
	01234567890123
$T =$	miississippii$
$LMS:$	* * * *
$T_R =$	[1, 3, 2, 0]
$pos_R =$	[, , ,]

Detalis der Reduktion: Reduziertes Suffixarray

Gibt es gleiche Ränge, erfolgt ein rekursiver Aufruf.

Sind alle Ränge verschieden, kann durch einmaliges Durchlaufen von T_R das Suffixarray der LMS-Suffixe pos_R direkt bestimmt werden (inverse Permutation): $pos_R[T_R[i]] := i$ für $0 \leq i < |T_R|$.

```
                  0         1
                  01234567890123
T =               miississippii$
LMS :              *   *   *    *
T_R =                [1, 3, 2, 0]
pos_R =              [ , 0,  ,  ]
```

Detalis der Reduktion: Reduziertes Suffixarray

Gibt es gleiche Ränge, erfolgt ein rekursiver Aufruf.

Sind alle Ränge verschieden, kann durch einmaliges Durchlaufen von T_R das Suffixarray der LMS-Suffixe pos_R direkt bestimmt werden (inverse Permutation): $pos_R[T_R[i]] := i$ für $0 \leq i < |T_R|$.

```
                    0         1
                    01234567890123
T =                 miississippii$
LMS :                *   *   *    *
T_R =                 [1, 3, 2, 0]
pos_R =               [ , 0,  , 1]
```

Detalis der Reduktion: Reduziertes Suffixarray

Gibt es gleiche Ränge, erfolgt ein rekursiver Aufruf.

Sind alle Ränge verschieden, kann durch einmaliges Durchlaufen von T_R das Suffixarray der LMS-Suffixe pos_R direkt bestimmt werden (inverse Permutation): $pos_R[T_R[i]] := i$ für $0 \leq i < |T_R|$.

```
                    0         1
                    01234567890123
T =                 miississippii$
LMS :                *   *   *    *
T_R =                 [1, 3, 2, 0]
pos_R =               [ , 0, 2, 1]
```

Detalis der Reduktion: Reduziertes Suffixarray

Gibt es gleiche Ränge, erfolgt ein rekursiver Aufruf.

Sind alle Ränge verschieden, kann durch einmaliges Durchlaufen von T_R das Suffixarray der LMS-Suffixe pos_R direkt bestimmt werden (inverse Permutation): $pos_R[T_R[i]] := i$ für $0 \leq i < |T_R|$.

```
                    0         1
                    01234567890123
T =                 miississippii$
LMS :                *   *   *    *
T_R =                  [1, 3, 2, 0]
pos_R =                [3, 0, 2, 1]
```

Details: Reihenfolge der LMS-Suffixe bestimmen

Ist pos_Rrekursiv oder direkt berechnet, wird die Folge seq der lexikographisch sortierten Startpositionen der LMS-Suffixe berechnet:

$$seq[i] = P[pos_R[i]],$$

wobei P die aufsteigenden Startpositionen der LMS-Suffixe im Text enthält.

Details: Reihenfolge der LMS-Suffixe bestimmen

Ist pos_R rekursiv oder direkt berechnet, wird die Folge *seq* der lexikographisch sortierten Startpositionen der LMS-Suffixe berechnet:

$$seq[i] = P[pos_R[i]],$$

wobei P die aufsteigenden Startpositionen der LMS-Suffixe im Text enthält.

```
                 01234567890123
T =              miississippii$
LMS :             *   *  *    *
P =              [1, 5, 8, 13]
T_R =             [1, 3, 2, 0]
pos_R =           [3, 0, 2, 1]
seq =            [  ,  ,  ,  ]
```

Details: Reihenfolge der LMS-Suffixe bestimmen

Ist pos_R rekursiv oder direkt berechnet, wird die Folge seq der lexikographisch sortierten Startpositionen der LMS-Suffixe berechnet:

$$seq[i] = P[pos_R[i]],$$

wobei P die aufsteigenden Startpositionen der LMS-Suffixe im Text enthält.

	01234567890123
$T =$	miississippii$
$LMS:$	* * * *
$P =$	[1, 5, 8, 13]
$T_R =$	[1, 3, 2, 0]
$pos_R =$	[3, 0, 2, 1]
$seq =$	[13, , ,]

Details: Reihenfolge der LMS-Suffixe bestimmen

Ist pos_R rekursiv oder direkt berechnet, wird die Folge seq der lexikographisch sortierten Startpositionen der LMS-Suffixe berechnet:

$$seq[i] = P[pos_R[i]],$$

wobei P die aufsteigenden Startpositionen der LMS-Suffixe im Text enthält.

	01234567890123
$T =$	miississippii$
$LMS:$	* * * *
$P =$	[1, 5, 8, 13]
$T_R =$	[1, 3, 2, 0]
$pos_R =$	[3, 0, 2, 1]
$seq =$	[13, 1, ,]

Details: Reihenfolge der LMS-Suffixe bestimmen

UA RUHR

Ist pos_R rekursiv oder direkt berechnet, wird die Folge seq der lexikographisch sortierten Startpositionen der LMS-Suffixe berechnet:

$$seq[i] = P[pos_R[i]],$$

wobei P die aufsteigenden Startpositionen der LMS-Suffixe im Text enthält.

	01234567890123
$T =$	miississippii$
$LMS:$	* * * *
$P =$	[1, 5, 8, 13]
$T_R =$	[1, 3, 2, 0]
$pos_R =$	[3, 0, 2, 1]
$seq =$	[13, 1, 8,]

Details: Reihenfolge der LMS-Suffixe bestimmen

Ist pos_R rekursiv oder direkt berechnet, wird die Folge seq der lexikographisch sortierten Startpositionen der LMS-Suffixe berechnet:

$$seq[i] = P[pos_R[i]],$$

wobei P die aufsteigenden Startpositionen der LMS-Suffixe im Text enthält.

```
                 01234567890123
T =              miississippii$
LMS :             *   *  *    *
P =               [1, 5, 8, 13]
T_R =              [1, 3, 2, 0]
pos_R =            [3, 0, 2, 1]
seq =             [13, 1, 8, 5]
```

Sortieren der LMS-Substrings

- Es bleibt die Frage offen, wie die LMS-Substrings sortiert werden.

Sortieren der LMS-Substrings

- Es bleibt die Frage offen, wie die LMS-Substrings sortiert werden.
- LMS-Substrings haben die Form S^+L^+S.
- Es genügt, die LMS-Startpositionen in beliebiger Reihenfolge (aufsteigend) an das Ende ihrer Buckets in ein leeres Suffixarray zu schreiben.
- Ein Links-Induktions-Scan und Rechts-Induktions-Scan sortiert die LMS-Substrings.
  (Gleiche Substrings können in beliebieger Reihenfolge stehen.)

Sortieren der LMS-Substrings

- Es bleibt die Frage offen, wie die LMS-Substrings sortiert werden.
- LMS-Substrings haben die Form S^+L^+S.
- Es genügt, die LMS-Startpositionen in beliebiger Reihenfolge (aufsteigend) an das Ende ihrer Buckets in ein leeres Suffixarray zu schreiben.
- Ein Links-Induktions-Scan und Rechts-Induktions-Scan sortiert die LMS-Substrings.
  (Gleiche Substrings können in beliebieger Reihenfolge stehen.)
- Zu Beginn alle Suffixe der Länge 1 (S) der Substrings korrekt sortiert.
- Gemäß dem Beweis für den Links-Induktions-Scan sind nach dessen Ausführung alle Substrings vom Typ L^+S korrekt sortiert.
- Nach dem Rechts-Induktions-Scan sind Substrings vom Typ S^+L^+S sortiert.

Laufzeitanalyse

Sei $T(n)$ die Zeit, um ein Suffixarray eines Textes der Länge n mit SAIS zu erstellen.

$$
\begin{aligned}
T(1) &= \mathcal{O}(1); \\
T(n) &\leq c_1 n + T(n/2) + c_2 n \\
&= Cn + T(n/2) \\
&\leq Cn + Cn/2 + T(n/4) \\
&\leq Cn(1 + 1/2 + 1/4 + \dots) + T(1) \\
&= 2Cn + \mathcal{O}(1) \;=\; \mathcal{O}(n).
\end{aligned}
$$

Also hat SAIS die Laufzeit $\mathcal{O}(n)$.

Anwendung: Mustersuche mit Suffixarrays

- Binäre Suche
- Pro Binärschritt $\mathcal{O}(m)$ Vergleiche
- Die Gesamtlaufzeit beträgt also $\mathcal{O}(m \log(n))$.
- Um alle Vorkommen zu finden, muss mit zwei binären Suchen zuerst die linke Grenze und danach die rechte Grenze im Suffixarray gefunden werden.

$p =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$T =$	m	i	i	s	s	i	s	s	i	p	p	i	i	$

$r =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$pos =$	13	12	11	1	8	5	2	0	10	9	7	4	6	3
	$	i						m	p		s			

Suffixarray bildet Blattebene des Suffixbaums ab, nicht aber Baumstruktur!

Rekonstruktion des Suffixbaums aus dem Suffixarray

- Suffixarray und Text bestimmen Baumstruktur, stellen sie aber nicht explizit dar.
- Stringtiefe innerer Knoten “zwischen” zwei Blättern?

Rekonstruktion des Suffixbaums aus dem Suffixarray

UA RUHR

- Suffixarray und Text bestimmen Baumstruktur, stellen sie aber nicht explizit dar.
- Stringtiefe innerer Knoten “zwischen” zwei Blättern?
- Gemeinsame Präfixe!
- $lcp[r] := \max\{|s| \mid s \text{ Präfix von } T[pos[r]:] \text{ und } T[pos[r-1]:]\}$
  Länge des längsten gemeinsamen Präfixes des lexikopgraphisch r-t kleinsten Suffixes und seines lexikographischen Vorgängers

lcp-Array

r	$pos[r]$	$lcp[r]$	$T[pos[r]:]$
0	13	-	`$`
1	12	0	`i$`
2	11	1	`ii$`
3	1	2	`iississippii$`
4	8	1	`ippii$`
5	5	1	`issippii$`
6	2	4	`ississippii$`
7	0	0	`miississippii$`
8	10	0	`pii$`
9	9	1	`ppii$`
10	7	0	`sippii$`
11	4	2	`sissippii$`
12	6	1	`ssippii$`
13	3	3	`ssissippii$`

Konstruktion des lcp-Arrays

- Naiv: sortierte Suffixe in lexikographischer Reihenfolge mit ihren Vorgängern vergleichen. Laufzeit: $\mathcal{O}(n^2)$.

Konstruktion des lcp-Arrays

- Naiv: sortierte Suffixe in lexikographischer Reihenfolge mit ihren Vorgängern vergleichen. Laufzeit: $\mathcal{O}(n^2)$.
- Angenommen man beginnt mit dem längsten Suffix $T = T[0:]$, vergleicht dieses mit seinem lexikographischen Vorgänger und erhält den lcp-Wert ℓ.
- Wo soll man ihn eintragen?

Konstruktion des lcp-Arrays

- Naiv: sortierte Suffixe in lexikographischer Reihenfolge mit ihren Vorgängern vergleichen. Laufzeit: $\mathcal{O}(n^2)$.
- Angenommen man beginnt mit dem längsten Suffix $T = T[0:]$, vergleicht dieses mit seinem lexikographischen Vorgänger und erhält den lcp-Wert ℓ.
- Wo soll man ihn eintragen? Gesucht: Rang r, so dass $pos[r] = 0$

Konstruktion des lcp-Arrays

- Naiv: sortierte Suffixe in lexikographischer Reihenfolge mit ihren Vorgängern vergleichen. Laufzeit: $\mathcal{O}(n^2)$.
- Angenommen man beginnt mit dem längsten Suffix $T = T[0:]$, vergleicht dieses mit seinem lexikographischen Vorgänger und erhält den lcp-Wert ℓ.
- Wo soll man ihn eintragen? Gesucht: Rang r, so dass $pos[r] = 0$
- Wo beginnt das mit $T[p:]$ zu vergleichende Suffix?

Konstruktion des lcp-Arrays

- Naiv: sortierte Suffixe in lexikographischer Reihenfolge mit ihren Vorgängern vergleichen. Laufzeit: $\mathcal{O}(n^2)$.
- Angenommen man beginnt mit dem längsten Suffix $T = T[0:]$, vergleicht dieses mit seinem lexikographischen Vorgänger und erhält den lcp-Wert ℓ.
- Wo soll man ihn eintragen? Gesucht: Rang r, so dass $pos[r] = 0$
- Wo beginnt das mit $T[p:]$ zu vergleichende Suffix? Rang r mit $pos[r] = p - 1$

Konstruktion des lcp-Arrays

- Naiv: sortierte Suffixe in lexikographischer Reihenfolge mit ihren Vorgängern vergleichen. Laufzeit: $\mathcal{O}(n^2)$.
- Angenommen man beginnt mit dem längsten Suffix $T = T[0:]$, vergleicht dieses mit seinem lexikographischen Vorgänger und erhält den lcp-Wert ℓ.
- Wo soll man ihn eintragen? Gesucht: Rang r, so dass $pos[r] = 0$
- Wo beginnt das mit $T[p:]$ zu vergleichende Suffix? Rang r mit $pos[r] = p - 1$
- Das nächste Suffix im Text $T[1:]$ muss mindestens einen lcp-Wert von $\ell - 1$ haben (entspricht Folgen eines Suffixlinks im Baum)
- Diese $\ell - 1$ Positionen müssen nicht verglichen werden.
- Man kann direkt ab der ℓ-ten Position vergleichen.

Konstruktion des lcp-Arrays

- Naiv: sortierte Suffixe in lexikographischer Reihenfolge mit ihren Vorgängern vergleichen. Laufzeit: $\mathcal{O}(n^2)$.
- Angenommen man beginnt mit dem längsten Suffix $T = T[0:]$, vergleicht dieses mit seinem lexikographischen Vorgänger und erhält den lcp-Wert ℓ.
- Wo soll man ihn eintragen? Gesucht: Rang r, so dass $pos[r] = 0$
- Wo beginnt das mit $T[p:]$ zu vergleichende Suffix? Rang r mit $pos[r] = p - 1$
- Das nächste Suffix im Text $T[1:]$ muss mindestens einen lcp-Wert von $\ell - 1$ haben (entspricht Folgen eines Suffixlinks im Baum)
- Diese $\ell - 1$ Positionen müssen nicht verglichen werden.
- Man kann direkt ab der ℓ-ten Position vergleichen.
- Beantwortung der Ranganfragen durch inverse Permutation *rank* von *pos*: Setze $rank[pos[p]] := p$ für alle $p = 0, \ldots, n - 1$.

Linearzeit-Konstruktion des lcp-Arrays

```
1  def lcp_linear(pos, text):
2      n = len(pos)
3      lcp = [-1] * n
4      rank = [0] * n
5      for r in range(n):
6          rank[pos[r]] = r
7      lp = 0  # aktuelle Praefixlaenge
8      for p in range(n-1):
9          r = rank[p]
10         pp = pos[r-1]
11         while text[p+lp]==text[pp+lp]:
12             lp += 1
13         lcp[r] = lp
14         lp = max(lp-1, 0)
15     return lcp
```

Laufzeitanalyse

- Konstruktion von *rank* dauert $\mathcal{O}(n)$ Zeit
- Pro p-Schleifendurchlauf konstante Zeit bis auf while-Schleife
- Pro p-Schleifendurchlauf fällt lp um 1, aber nicht unter 0.
- while-Schleife erhöht lp um 1
- lp kann nicht größer als n sein.
- Gesamtzahl der while-Durchläufer daher durch $\mathcal{O}(n)$ beschränkt.

Gesamtlaufzeit ist $\mathcal{O}(n)$, also linear in Textlänge.

Beispiel: Linearzeit-Konstruktion des lcp-Arrays

$pp = 2$

$p = 0$

$lp = 0$

$p \mid r$	$pos[r]$	$rank[p]$	$lcp[r]$	$T[pos[r]:]$
0	13	7	-	$
1	12	3		i$
2	11	6		ii$
3	1	13		iissis...
4	8	11		ippii$
5	5	5		issipp...
6	2	12		ississ...
7	0	10		miissi...
8	10	4		pii$
9	9	9		ppii$
10	7	8		sippii...
11	4	2		sissip...
12	6	1		ssippi...
13	3	0		ssissi...

Beispiel: Linearzeit-Konstruktion des lcp-Arrays

$pp = 11$

$p = 1$

$lp = 0$

$p \mid r$	$pos[r]$	$rank[p]$	$lcp[r]$	$T[pos[r]:]$
0	13	7	-	$
1	12	3		i$
2	11	6		ii$
3	1	13		iissis...
4	8	11		ippii$
5	5	5		issipp...
6	2	12		ississ...
7	0	10	0	miissi...
8	10	4		pii$
9	9	9		ppii$
10	7	8		sippii...
11	4	2		sissip...
12	6	1		ssippi...
13	3	0		ssissi...

Beispiel: Linearzeit-Konstruktion des lcp-Arrays

$p \mid r$	$pos[r]$	$rank[p]$	$lcp[r]$	$T[pos[r]:]$
0	13	7	-	$
1	12	3		i$
2	11	6		ii$
3	1	13		iissis...
4	8	11		ippii$
5	5	5		issipp...
6	2	12		ississ...
7	0	10	0	miissi...
8	10	4		pii$
9	9	9		ppii$
10	7	8		sippii...
11	4	2		sissip...
12	6	1		ssippi...
13	3	0		ssissi...

$pp = 11$

$p = 1$

$lp = 1$

Beispiel: Linearzeit-Konstruktion des lcp-Arrays

$p \mid r$	$pos[r]$	$rank[p]$	$lcp[r]$	$T[pos[r]:]$
0	13	7	-	$
1	12	3		i$
2	11	6		ii$
3	1	13		iissis...
4	8	11		ippii$
5	5	5		issipp...
6	2	12		ississ...
7	0	10	0	miissi...
8	10	4		pii$
9	9	9		ppii$
10	7	8		sippii...
11	4	2		sissip...
12	6	1		ssippi...
13	3	0		ssissi...

$pp = 11$

$p = 1$

$lp = 2$

Beispiel: Linearzeit-Konstruktion des lcp-Arrays

$p \mid r$	$pos[r]$	$rank[p]$	$lcp[r]$	$T[pos[r]:]$
0	13	7	-	$
1	12	3		i$
2	11	6		ii$
3	1	13	2	iissis...
4	8	11		ippii$
5	5	5		issipp...
6	2	12		ississ...
7	0	10	0	miissi...
8	10	4		pii$
9	9	9		ppii$
10	7	8		sippii...
11	4	2		sissip...
12	6	1		ssippi...
13	3	0		ssissi...

$pp = 5$

$p = 2$

$lp = 1$

Beispiel: Linearzeit-Konstruktion des lcp-Arrays

$p \mid r$	$pos[r]$	$rank[p]$	$lcp[r]$	$T[pos[r]:]$
0	13	7	-	$
1	12	3		i$
2	11	6		ii$
3	1	13	2	iissis...
4	8	11		ippii$
5	5	5		issipp...
6	2	12		ississ...
7	0	10	0	miissi...
8	10	4		pii$
9	9	9		ppii$
10	7	8		sippii...
11	4	2		sissip...
12	6	1		ssippi...
13	3	0		ssissi...

$pp = 5$

$p = 2$

$lp = 2$

Beispiel: Linearzeit-Konstruktion des lcp-Arrays

$p \mid r$	$pos[r]$	$rank[p]$	$lcp[r]$	$T[pos[r]:]$
0	13	7	-	$
1	12	3		i$
2	11	6		ii$
3	1	13	2	iissis...
4	8	11		ippii$
5	5	5		issipp...
6	2	12		ississ...
7	0	10	0	miissi...
8	10	4		pii$
9	9	9		ppii$
10	7	8		sippii...
11	4	2		sissip...
12	6	1		ssippi...
13	3	0		ssissi...

$pp = 5$

$p = 2$

$lp = 3$

Beispiel: Linearzeit-Konstruktion des lcp-Arrays

$p \mid r$	$pos[r]$	$rank[p]$	$lcp[r]$	$T[pos[r]:]$
0	13	7	-	$
1	12	3		i$
2	11	6		ii$
3	1	13	2	iissis...
4	8	11		ippii$
5	5	5		issipp...
6	2	12		ississ...
7	0	10	0	miissi...
8	10	4		pii$
9	9	9		ppii$
10	7	8		sippii...
11	4	2		sissip...
12	6	1		ssippi...
13	3	0		ssissi...

$pp = 5$

$p = 2$

$lp = 4$

Beispiel: Linearzeit-Konstruktion des lcp-Arrays

$p \mid r$	$pos[r]$	$rank[p]$	$lcp[r]$	$T[pos[r]:]$
0	13	7	-	`$`
1	12	3		`i$`
2	11	6		`ii$`
3	1	13	2	`iissis...`
4	8	11		`ippii$`
5	5	5		`issipp...`
6	2	12	4	`ississ...`
7	0	10	0	`miissi...`
8	10	4		`pii$`
9	9	9		`ppii$`
10	7	8		`sippii...`
11	4	2		`sissip...`
12	6	1		`ssippi...`
13	3	0		`ssissi...`

$pp = 6$

$p = 3$

$lp = 3$

Beispiel: Linearzeit-Konstruktion des lcp-Arrays

$p \mid r$	$pos[r]$	$rank[p]$	$lcp[r]$	$T[pos[r]:]$
0	13	7	-	$
1	12	3		i$
2	11	6		ii$
3	1	13	2	iissis...
4	8	11		ippii$
5	5	5		issipp...
6	2	12	4	ississ...
7	0	10	0	miissi...
8	10	4		pii$
9	9	9		ppii$
10	7	8		sippii...
11	4	2		sissip...
12	6	1		ssippi...
13	3	0	3	ssissi...

$pp = 7$

$p = 4$

$lp = 2$

Beispiel: Linearzeit-Konstruktion des lcp-Arrays

$p \mid r$	$pos[r]$	$rank[p]$	$lcp[r]$	$T[pos[r]:]$
0	13	7	-	$
1	12	3		i$
2	11	6		ii$
3	1	13	2	iissis...
4	8	11		ippii$
5	5	5		issipp...
6	2	12	4	ississ...
7	0	10	0	miissi...
8	10	4		pii$
9	9	9		ppii$
10	7	8		sippii...
11	4	2	2	sissip...
12	6	1		ssippi...
13	3	0	3	ssissi...

$pp = 8$

$p = 5$

$lp = 1$

Beispiel: Linearzeit-Konstruktion des lcp-Arrays

$pp = 4$

$p = 6$

$lp = 0$

$p \mid r$	$pos[r]$	$rank[p]$	$lcp[r]$	$T[pos[r]:]$
0	13	7	-	$
1	12	3		i$
2	11	6		ii$
3	1	13	2	iissis...
4	8	11		ippii$
5	5	5	1	issipp...
6	2	12	4	ississ...
7	0	10	0	miissi...
8	10	4		pii$
9	9	9		ppii$
10	7	8		sippii...
11	4	2	2	sissip...
12	6	1		ssippi...
13	3	0	3	ssissi...

Beispiel: Linearzeit-Konstruktion des lcp-Arrays

$p \mid r$	$pos[r]$	$rank[p]$	$lcp[r]$	$T[pos[r]:]$
0	13	7	-	$
1	12	3		i$
2	11	6		ii$
3	1	13	2	iissis...
4	8	11		ippii$
5	5	5	1	issipp...
6	2	12	4	ississ...
7	0	10	0	miissi...
8	10	4		pii$
9	9	9		ppii$
10	7	8		sippii...
11	4	2	2	sissip...
12	6	1		ssippi...
13	3	0	3	ssissi...

$pp = 4$

$p = 6$

$lp = 1$

Beispiel: Linearzeit-Konstruktion des lcp-Arrays

$p \mid r$	$pos[r]$	$rank[p]$	$lcp[r]$	$T[pos[r]:]$
0	13	7	-	$
1	12	3		i$
2	11	6		ii$
3	1	13	2	iissis...
4	8	11		ippii$
5	5	5	1	issipp...
6	2	12	4	ississ...
7	0	10	0	miissi...
8	10	4		pii$
9	9	9		ppii$
10	7	8		sippii...
11	4	2	2	sissip...
12	6	1	1	ssippi...
13	3	0	3	ssissi...

$pp = 9$

$p = 7$

$lp = 0$

Beispiel: Linearzeit-Konstruktion des lcp-Arrays

$p \mid r$	$pos[r]$	$rank[p]$	$lcp[r]$	$T[pos[r]:]$
0	13	7	-	$
1	12	3		i$
2	11	6		ii$
3	1	13	2	iissis...
4	8	11		ippii$
5	5	5	1	issipp...
6	2	12	4	ississ...
7	0	10	0	miissi...
8	10	4		pii$
9	9	9		ppii$
10	7	8	0	sippii...
11	4	2	2	sissip...
12	6	1	1	ssippi...
13	3	0	3	ssissi...

$pp = 1$

$p = 8$

$lp = 0$

Beispiel: Linearzeit-Konstruktion des lcp-Arrays

$p \mid r$	$pos[r]$	$rank[p]$	$lcp[r]$	$T[pos[r]:]$
0	13	7	-	$
1	12	3		i$
2	11	6		ii$
3	1	13	2	iissis...
4	8	11		ippii$
5	5	5	1	issipp...
6	2	12	4	ississ...
7	0	10	0	miissi...
$pp = 1$ 8	10	4		pii$
9	9	9		ppii$
$p = 8$ 10	7	8	0	sippii...
$lp = 1$ 11	4	2	2	sissip...
12	6	1	1	ssippi...
13	3	0	3	ssissi...

Beispiel: Linearzeit-Konstruktion des lcp-Arrays

$p \mid r$	$pos[r]$	$rank[p]$	$lcp[r]$	$T[pos[r]:]$
0	13	7	-	$
1	12	3		i$
2	11	6		ii$
3	1	13	2	iissis...
4	8	11	1	ippii$
5	5	5	1	issipp...
6	2	12	4	ississ...
7	0	10	0	miissi...
8	10	4		pii$
9	9	9		ppii$
10	7	8	0	sippii...
11	4	2	2	sissip...
12	6	1	1	ssippi...
13	3	0	3	ssissi...

$pp = 10$

$p = 9$

$lp = 0$

Beispiel: Linearzeit-Konstruktion des lcp-Arrays

$p \mid r$	$pos[r]$	$rank[p]$	$lcp[r]$	$T[pos[r]:]$
0	13	7	-	`$`
1	12	3		`i$`
2	11	6		`ii$`
3	1	13	2	`iissis...`
4	8	11	1	`ippii$`
5	5	5	1	`issipp...`
6	2	12	4	`ississ...`
7	0	10	0	`miissi...`
8	10	4		`pii$`
9	9	9		`ppii$`
10	7	8	0	`sippii...`
11	4	2	2	`sissip...`
12	6	1	1	`ssippi...`
13	3	0	3	`ssissi...`

$pp = 10$

$p = 9$

$lp = 1$

Beispiel: Linearzeit-Konstruktion des lcp-Arrays

$pp = 0$

$p = 10$

$lp = 0$

$p \mid r$	$pos[r]$	$rank[p]$	$lcp[r]$	$T[pos[r]:]$
0	13	7	-	$
1	12	3		i$
2	11	6		ii$
3	1	13	2	iissis...
4	8	11	1	ippii$
5	5	5	1	issipp...
6	2	12	4	ississ...
7	0	10	0	miissi...
8	10	4		pii$
9	9	9	1	ppii$
10	7	8	0	sippii...
11	4	2	2	sissip...
12	6	1	1	ssippi...
13	3	0	3	ssissi...

Beispiel: Linearzeit-Konstruktion des lcp-Arrays

$pp = 12$

$p = 11$

$lp = 0$

$p \mid r$	$pos[r]$	$rank[p]$	$lcp[r]$	$T[pos[r]:]$
0	13	7	-	$
1	12	3		i$
2	11	6		ii$
3	1	13	2	iissis...
4	8	11	1	ippii$
5	5	5	1	issipp...
6	2	12	4	ississ...
7	0	10	0	miissi...
8	10	4	0	pii$
9	9	9	1	ppii$
10	7	8	0	sippii...
11	4	2	2	sissip...
12	6	1	1	ssippi...
13	3	0	3	ssissi...

Beispiel: Linearzeit-Konstruktion des lcp-Arrays

$pp = 12$

$p = 11$

$lp = 1$

$p \mid r$	$pos[r]$	$rank[p]$	$lcp[r]$	$T[pos[r]:]$
0	13	7	-	$
1	12	3		i$
2	11	6		ii$
3	1	13	2	iissis...
4	8	11	1	ippii$
5	5	5	1	issipp...
6	2	12	4	ississ...
7	0	10	0	miissi...
8	10	4	0	pii$
9	9	9	1	ppii$
10	7	8	0	sippii...
11	4	2	2	sissip...
12	6	1	1	ssippi...
13	3	0	3	ssissi...

Beispiel: Linearzeit-Konstruktion des lcp-Arrays

$pp = 13$

$p = 12$

$lp = 0$

$p \mid r$	$pos[r]$	$rank[p]$	$lcp[r]$	$T[pos[r]:]$
0	13	7	-	$
1	12	3		i$
2	11	6	1	ii$
3	1	13	2	iissis...
4	8	11	1	ippii$
5	5	5	1	issipp...
6	2	12	4	ississ...
7	0	10	0	miissi...
8	10	4	0	pii$
9	9	9	1	ppii$
10	7	8	0	sippii...
11	4	2	2	sissip...
12	6	1	1	ssippi...
13	3	0	3	ssissi...

Beispiel: Linearzeit-Konstruktion des lcp-Arrays

	$p \mid r$	$pos[r]$	$rank[p]$	$lcp[r]$	$T[pos[r]:]$
	0	13	7	-	`$`
	1	12	3	0	`i$`
	2	11	6	1	`ii$`
	3	1	13	2	`iissis...`
	4	8	11	1	`ippii$`
	5	5	5	1	`issipp...`
	6	2	12	4	`ississ...`
	7	0	10	0	`miissi...`
$pp =$	8	10	4	0	`pii$`
	9	9	9	1	`ppii$`
$p =$	10	7	8	0	`sippii...`
$lp =$	11	4	2	2	`sissip...`
	12	6	1	1	`ssippi...`
	13	3	0	3	`ssissi...`

Längster wiederholter Teilstring (LRS)

Um den LRS in Text T zu finden, muss der Index r^* des größten *lcp*-Werts gefunden werden.

$$r^* = \arg\max_{r<|T|}\{lcp[r]\}$$

$$LRS(T) = T[pos[r^*] : pos[r^*] + lcp[r^*]]$$

Längster wiederholter Teilstring (LRS)

Um den LRS in Text T zu finden, muss der Index r^* des größten *lcp*-Werts gefunden werden.

$$r^* = \arg\max_{r<|T|}\{lcp[r]\}$$

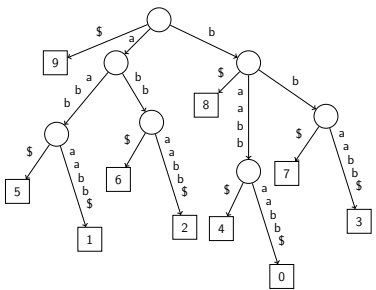
$$LRS(T) = T[pos[r^*] : pos[r^*] + lcp[r^*]]$$

Beispiel: `miississippii$`

$$r^* = 6$$
$$pos[r^*] = 2$$
$$lcp[r^*] = 4$$
$$LRS(T) = T[2 : 2+4] = \texttt{issi}$$

Kürzester eindeutiger Teilstring (SUS)

Beispiel: $T = \texttt{baabbaabb\$}$



r	$pos[r]$	$LCP[r]$	$T[pos[r]:]$
0	9	-	$
1	5	0	aabb$
2	1	4	aabbaabb$
3	6	1	abb$
4	2	3	abbaabb$
5	8	0	b$
6	4	1	baabb$
7	0	5	baabbaabb$
8	7	1	bb$
9	3	2	bbaabb$

Kürzester eindeutiger Teilstring (SUS)

- Stringtiefe des inneren Knoten, von dem Blatt p ausgeht, lässt sich ermitteln, indem das Maximum der lcp-Werte genommen wird, die Position p betrachten. Sei also $r := \mathit{rank}[p]$.
- Eindeutig für Suffix p ist also Stringlänge $\mathit{ulen}(r) := 1 + \max(\mathit{lcp}[r], \mathit{lcp}[r+1])$.

Kürzester eindeutiger Teilstring (SUS)

- Stringtiefe des inneren Knoten, von dem Blatt p ausgeht, lässt sich ermitteln, indem das Maximum der lcp-Werte genommen wird, die Position p betrachten. Sei also $r := rank[p]$.
- Eindeutig für Suffix p ist also Stringlänge $ulen(r) := 1 + \max(lcp[r], lcp[r+1])$.
- Gesucht ist ein Teilstring minimaler Stringtiefe, der nicht mit dem Wächter endet.
- Sei $r^* := \text{argmin}_{r<|T|} \{ulen(r) \mid pos[r] + ulen(r) < |T|\}$.

Kürzester eindeutiger Teilstring (SUS)

- Stringtiefe des inneren Knoten, von dem Blatt p ausgeht, lässt sich ermitteln, indem das Maximum der lcp-Werte genommen wird, die Position p betrachten. Sei also $r := rank[p]$.
- Eindeutig für Suffix p ist also Stringlänge $ulen(r) := 1 + \max(lcp[r], lcp[r+1])$.
- Gesucht ist ein Teilstring minimaler Stringtiefe, der nicht mit dem Wächter endet.
- Sei $r^* := \text{argmin}_{r<|T|}\{ulen(r) \mid pos[r] + ulen(r) < |T|\}$.
- Dann ist $SUS(T) = T[pos[r^*] : pos[r^*] + ulen(r^*)]$.

$T = \texttt{baabbaabb\$}$:
$r^* = 9 \rightarrow pos[9] = 3, ulen(9) = 3 \rightarrow sus(T) = T[3:3+3] = \texttt{bba}$

Längster gemeinsamer Teilstring (LCF)

- Gegeben seien die Texte T_1 und T_2.
- Gesucht ist der längste gemeinsame Teilstring von T_1 und T_2.

Längster gemeinsamer Teilstring (LCF)

- Gegeben seien die Texte T_1 und T_2.
- Gesucht ist der längste gemeinsame Teilstring von T_1 und T_2.
- Sei der verallgemeinerte Text $T := T_1\$_1 T_2\$_2$ mit $\$_1 < \$_2$.
- Alle Suffixe, die vor $\$_1$ anfangen, werden mit 1 beschriftet, die anderen mit 2.
- Sei $label[r]$ die Beschriftung von $pos[r]$.

Längster gemeinsamer Teilstring (LCF)

- Gegeben seien die Texte T_1 und T_2.
- Gesucht ist der längste gemeinsame Teilstring von T_1 und T_2.
- Sei der verallgemeinerte Text $T := T_1\$_1 T_2\$_2$ mit $\$_1 < \$_2$.
- Alle Suffixe, die vor $\$_1$ anfangen, werden mit 1 beschriftet, die anderen mit 2.
- Sei $\mathit{label}[r]$ die Beschriftung von $\mathit{pos}[r]$.
- Gesucht ist $r^* = \arg\max_{r<|T|}\{\mathit{lcp}[r] \mid \mathit{label}[r] \neq \mathit{label}[r-1]\}$.

Längster gemeinsamer Teilstring (LCF)

Beispiel: $T =$ `baabb#aaba$`

r	$pos[r]$	$lcp[r]$	$label[r]$	$T[pos[r]:]$
0	5	-	1	`#aaba$`
1	10	0	2	`$`
2	9	0	2	`a$`
3	6	1	2	`aaba$`
4	1	3	1	`aabb#aaba$`
5	7	1	2	`aba$`
6	2	2	1	`abb#aaba$`
7	4	0	1	`b#aaba$`
8	8	1	2	`ba$`
9	0	2	1	`baabb#aaba$`
10	3	1	1	`bb#aaba$`

Längster gemeinsamer Teilstring (LCF)

Beispiel: $T =$ `baabb#aaba$`

r	$pos[r]$	$lcp[r]$	$label[r]$	$T[pos[r]:]$
0	5	-	1	`#aaba$`
1	10	0	2	`$`
2	9	0	2	`a$`
3	6	1	2	`aaba$`
4	1	3	1	`aabb#aaba$`
5	7	1	2	`aba$`
6	2	2	1	`abb#aaba$`
7	4	0	1	`b#aaba$`
8	8	1	2	`ba$`
9	0	2	1	`baabb#aaba$`
10	3	1	1	`bb#aaba$`

$r^* = 4 \rightarrow pos[4] = 1, lcp[4] = 3 \rightarrow T[1:1+3] =$ `aab`

Zusammenfassung

- Der SAIS-Algorithmus erstellt ein Suffixarray in $\mathcal{O}(n)$ Zeit.
- Verschiedene Fragestellungen können mit dem Suffixarray und lcp-Array effizient beantwortet werden:
  - Kommt P in T vor? Wenn ja, wo? $\mathcal{O}(m \log n)$ Zeit.
  - Welcher ist der längste wiederholte Teilstring im Text T?
  - Welcher ist der kürzeste eindeutige Teilstring im Text T?
  - Welcher ist der längste gemeinsame Teilstring der beiden Texte T_1 und T_2?
- Der Speicherverbrauch liegt bei $2 \cdot (n\lceil \log(n) \rceil)$ Bits.