UA RUHR

Algorithmen auf Sequenzen

Exakte Mustersuche: Sublineare Algorithmen

Sven Rahmann

Genominformatik
Universitätsklinikum Essen
Universität Duisburg-Essen
Universitätsallianz Ruhr

Sublineare Algorithmen zur exakten Mustersuche

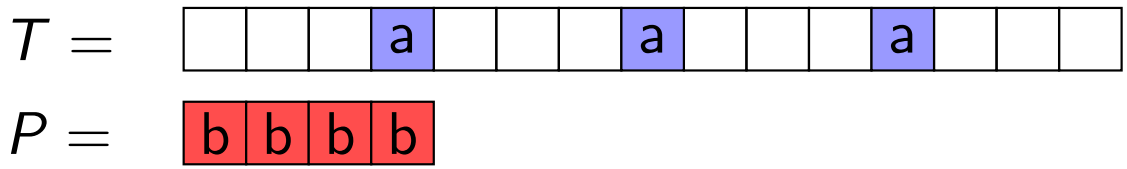
- Bisherige Algorithmen haben jeden Buchstaben im Text exakt einmal gelesen.
- Kleinstmögliche Anzahl von Vergleichen zwischen P und T?

Sublineare Algorithmen zur exakten Mustersuche

UA RUHR

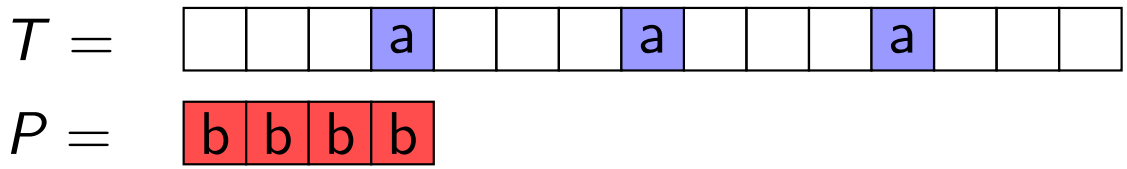
- Bisherige Algorithmen haben jeden Buchstaben im Text exakt einmal gelesen.
- Kleinstmögliche Anzahl von Vergleichen zwischen P und T?
- Wenn das Muster von rechts verglichen wird und der Textbuchstabe nicht in P vorkommt, kann man das Muster sofort um m Stellen verschieben.
- Wenn aber in einem Block von m Textzeichen keins vergleicht, kann man das Muster übersehen.
- Eine untere Schranke für die exakte Mustersuche ist demnach $\Omega(n/m)$.

Szenario für untere Schranke



Das Muster kann immer um m Stellen verschoben werden.

Szenario für untere Schranke



Das Muster kann immer um m Stellen verschoben werden.

Allgemein: Für jedes $\sigma \in \Sigma$ ermitteln, wie weit verschoben werden darf, ohne eine Instanz des Musters zu übersehen.

Der **Horspool-Algoithmus** realisiert diesen Ansatz.

Der Horspool-Algorithmus

Beginnend mit einem Suchfenster ganz links im Text, bis das Suchfenster rechts den Text verlässt:

- Das rechteste Zeichen c des Text-Suchfensters wird mit $P[m-1]$ verglichen.
- Berechne Verschiebung an Hand von c.
- Bei Nichtübereinstimmung: Verschiebe sofort.
- Bei Übereinstimmung: Vergleiche P mit Textabschnitt, verschiebe dann.

Berechnung der Verschiebung (shift): Sei

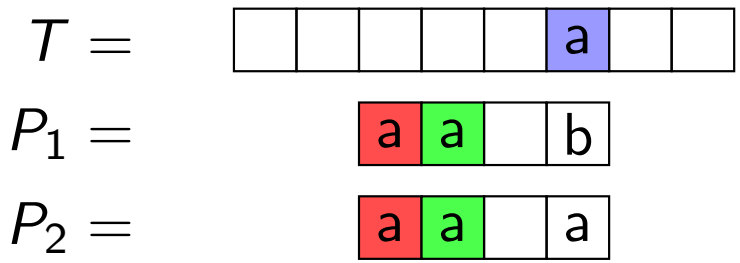
$$\ell[c] := \max\{\{0 \leq j < m-1 : P[j] = c\} \cup \{-1\}\}$$

die rechteste Position von c in $P[: m-1]$ (bzw. -1)

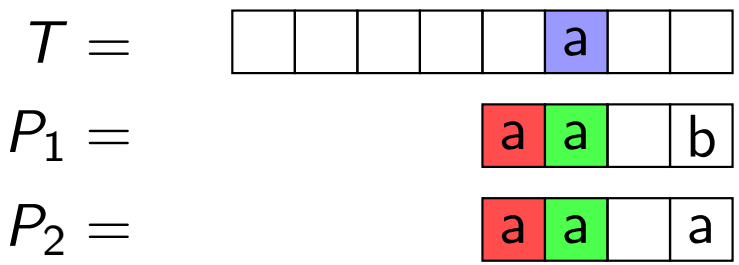
Verschiebung: $\mathit{shift}[c] := m - 1 - \ell[c]$

Der Horspool-Algorithmus

Vor der Verschiebung:



Nach der Verschiebung:



Der Horspool-Algorithmus

Erstellen der Verschiebungstabelle:

```
1 def create_shifts(P, S):
2     m = len(P)
3     shifts = {s: m for s in S}
4     for i, c in enumerate(P[:m-1]):
5         shifts[c] = m - 1 - i
6     return shifts
```

$P =$ a b a b a c a

$shifts =$

a	7
b	7
c	7

Der Horspool-Algorithmus

Erstellen der Verschiebungstabelle:

```
1 def create_shifts(P, S):
2     m = len(P)
3     shifts = {s: m for s in S}
4     for i, c in enumerate(P[:m-1]):
5         shifts[c] = m - 1 - i
6     return shifts
```

$P =$ a b a b a c a

$shifts =$

a	7
b	7
c	7

Der Horspool-Algorithmus

UA RUHR

Erstellen der Verschiebungstabelle:

```
1 def create_shifts(P, S):
2     m = len(P)
3     shifts = {s: m for s in S}
4     for i, c in enumerate(P[:m-1]):
5         shifts[c] = m - 1 - i
6     return shifts
```

$P =$ a b a b a c a

$shifts =$

a	7
b	7
c	7

Der Horspool-Algorithmus

Erstellen der Verschiebungstabelle:

```
1 def create_shifts(P, S):
2     m = len(P)
3     shifts = {s: m for s in S}
4     for i, c in enumerate(P[:m-1]):
5         shifts[c] = m - 1 - i
6     return shifts
```

$P =$ a b a b a c a

$shifts =$

a	6
b	7
c	7

Der Horspool-Algorithmus

Erstellen der Verschiebungstabelle:

```
1 def create_shifts(P, S):
2     m = len(P)
3     shifts = {s: m for s in S}
4     for i, c in enumerate(P[:m-1]):
5         shifts[c] = m - 1 - i
6     return shifts
```

$P =$ a b a b a c a

$shifts =$

a	6
b	7
c	7

Der Horspool-Algorithmus

Erstellen der Verschiebungstabelle:

```
1 def create_shifts(P, S):
2     m = len(P)
3     shifts = {s: m for s in S}
4     for i, c in enumerate(P[:m-1]):
5         shifts[c] = m - 1 - i
6     return shifts
```

$P =$ a b a b a c a

$shifts =$

a	6
b	5
c	7

Der Horspool-Algorithmus

Erstellen der Verschiebungstabelle:

```
1 def create_shifts(P, S):
2     m = len(P)
3     shifts = {s: m for s in S}
4     for i, c in enumerate(P[:m-1]):
5         shifts[c] = m - 1 - i
6     return shifts
```

$P =$ a b a b a c a

$shifts =$

a	6
b	5
c	7

Der Horspool-Algorithmus

Erstellen der Verschiebungstabelle:

```
1 def create_shifts(P, S):
2     m = len(P)
3     shifts = {s: m for s in S}
4     for i, c in enumerate(P[:m-1]):
5         shifts[c] = m - 1 - i
6     return shifts
```

$P =$ a b a b a c a

$shifts =$

a	4
b	5
c	7

Der Horspool-Algorithmus

Erstellen der Verschiebungstabelle:

```
1 def create_shifts(P, S):
2     m = len(P)
3     shifts = {s: m for s in S}
4     for i, c in enumerate(P[:m-1]):
5         shifts[c] = m - 1 - i
6     return shifts
```

$P =$ a b a b a c a

$shifts =$

a	4
b	5
c	7

Der Horspool-Algorithmus

Erstellen der Verschiebungstabelle:

```
1 def create_shifts(P, S):
2     m = len(P)
3     shifts = {s: m for s in S}
4     for i, c in enumerate(P[:m-1]):
5         shifts[c] = m - 1 - i
6     return shifts
```

$P =$ a b a b a c a

$shifts =$

a	4
b	3
c	7

Der Horspool-Algorithmus

Erstellen der Verschiebungstabelle:

```
1 def create_shifts(P, S):
2     m = len(P)
3     shifts = {s: m for s in S}
4     for i, c in enumerate(P[:m-1]):
5         shifts[c] = m - 1 - i
6     return shifts
```

$P =$ a b a b a c a

$shifts =$

a	4
b	3
c	7

Der Horspool-Algorithmus

Erstellen der Verschiebungstabelle:

```
1 def create_shifts(P, S):
2     m = len(P)
3     shifts = {s: m for s in S}
4     for i, c in enumerate(P[:m-1]):
5         shifts[c] = m - 1 - i
6     return shifts
```

$P =$ a b a b a c a

$shifts =$

a	2
b	3
c	7

Der Horspool-Algorithmus

Erstellen der Verschiebungstabelle:

```
1 def create_shifts(P, S):
2     m = len(P)
3     shifts = {s: m for s in S}
4     for i, c in enumerate(P[:m-1]):
5         shifts[c] = m - 1 - i
6     return shifts
```

$P =$ a b a b a c a

$shifts =$

a	2
b	3
c	7

Der Horspool-Algorithmus

UA RUHR

Erstellen der Verschiebungstabelle:

```
1 def create_shifts(P, S):
2     m = len(P)
3     shifts = {s: m for s in S}
4     for i, c in enumerate(P[:m-1]):
5         shifts[c] = m - 1 - i
6     return shifts
```

$P =$ a b a b a c a

shifts =

a	2
b	3
c	1

Der Horspool-Algorithmus

Erstellen der Verschiebungstabelle:

```
1 def create_shifts(P, S):
2     m = len(P)
3     shifts = {s: m for s in S}
4     for i, c in enumerate(P[:m-1]):
5         shifts[c] = m - 1 - i
6     return shifts
```

$P =$ a b a b a c a

$shifts =$

a	2
b	3
c	1

Der Horspool-Algorithmus

```
1  def horspool(P, T):
2      m, n, S = len(P), len(T), set(P + T)
3      shifts = create_shifts(P, S)
4      lastP = P[-1]
5      last = m-1  # rechteste Pos. des Suchfensters
6      while True:
7          while last < n and T[last] != last_P:
8              last += shifts[T[last]]
9          if last >= n:
10             break
11         if T[last-m+1:last] == P[:m-1]:
12             yield (last-m+1, last+1)
13         last += shifts[last_P]
```

Der Horspool-Algorithmus

Mustersuche mit dem Horspool-Algorithmus:

```
1 while True:
2     while last < n and T[last] != last_P:
3         last += shifts[T[last]]
4     if last >= n:  break
5     if T[last-m+1:last] == P[:m-1]:
6         yield (last-m+1, last+1)
7     last += shifts[last_P]
```

$T =$ | b | a | b | a | b | a | b | c | a | b | a | b | a | c | a | b | c | c |

$P =$ | a | b | a | b | a | c | a |

$last = 6$

shifts:

a: 2, b: 3, c: 1

Der Horspool-Algorithmus

Mustersuche mit dem Horspool-Algorithmus:

```
1 while True:
2     while last < n and T[last] != last_P:
3         last += shifts[T[last]]
4     if last >= n:  break
5     if T[last-m+1:last] == P[:m-1]:
6         yield (last-m+1, last+1)
7     last += shifts[last_P]
```

$T =$ | b | a | b | a | b | a | b | c | a | b | a | b | a | c | a | b | c | c |

$P =$ | a | b | a | b | a | c | a |

$last = 6$

shifts:

a: 2, b: 3, c: 1

Der Horspool-Algorithmus

Mustersuche mit dem Horspool-Algorithmus:

```
1 while True:
2     while last < n and T[last] != last_P:
3         last += shifts[T[last]]
4     if last >= n:  break
5     if T[last-m+1:last] == P[:m-1]:
6         yield (last-m+1, last+1)
7     last += shifts[last_P]
```

$T =$ | b | a | b | a | b | a | b | c | a | b | a | b | a | c | a | b | c | c |

$P =$ | a | b | a | b | a | c | a |

$last = 6$

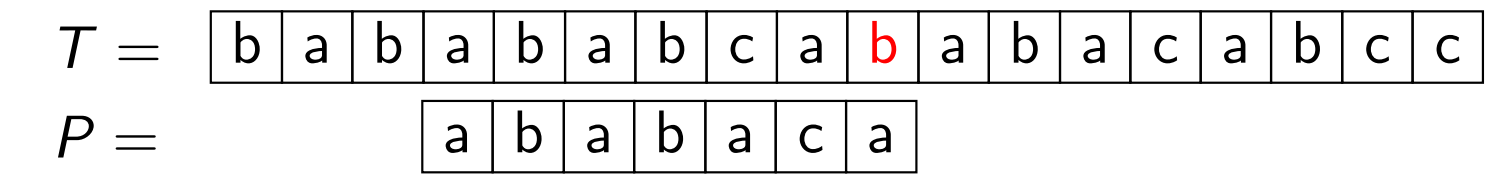
shifts:

a: 2, b: 3, c: 1

Der Horspool-Algorithmus

Mustersuche mit dem Horspool-Algorithmus:

```
1 while True:
2     while last < n and T[last] != last_P:
3         last += shifts[T[last]]
4     if last >= n:  break
5     if T[last-m+1:last] == P[:m-1]:
6         yield (last-m+1, last+1)
7     last += shifts[last_P]
```



Der Horspool-Algorithmus

Mustersuche mit dem Horspool-Algorithmus:

```
1 while True:
2     while last < n and T[last] != last_P:
3         last += shifts[T[last]]
4     if last >= n:  break
5     if T[last-m+1:last] == P[:m-1]:
6         yield (last-m+1, last+1)
7     last += shifts[last_P]
```

$T =$ | b | a | b | a | b | a | b | c | a | b | a | b | a | c | a | b | c | c |

$P =$ | a | b | a | b | a | c | a |

$last = 9$

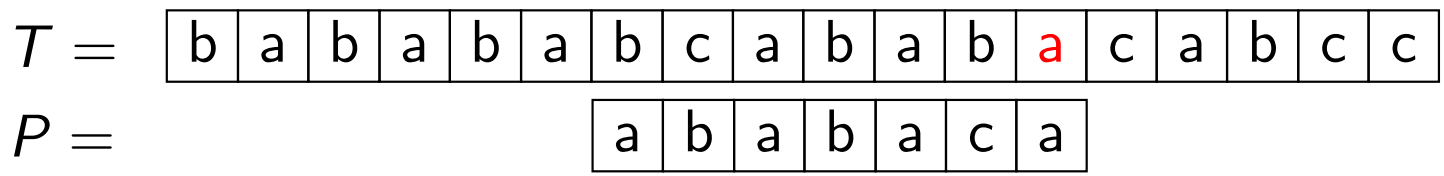
shifts:

a: 2, b: 3, c: 1

Der Horspool-Algorithmus

Mustersuche mit dem Horspool-Algorithmus:

```
1 while True:
2     while last < n and T[last] != last_P:
3         last += shifts[T[last]]
4     if last >= n:  break
5     if T[last-m+1:last] == P[:m-1]:
6         yield (last-m+1, last+1)
7     last += shifts[last_P]
```



last = 12

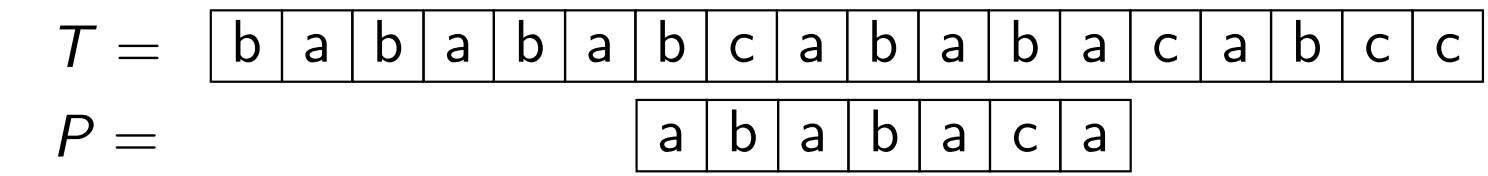
shifts:

a: 2, b: 3, c: 1

Der Horspool-Algorithmus

Mustersuche mit dem Horspool-Algorithmus:

```
1 while True:
2     while last < n and T[last] != last_P:
3         last += shifts[T[last]]
4     if last >= n:  break
5     if T[last-m+1:last] == P[:m-1]:
6         yield (last-m+1, last+1)
7     last += shifts[last_P]
```



last = 12

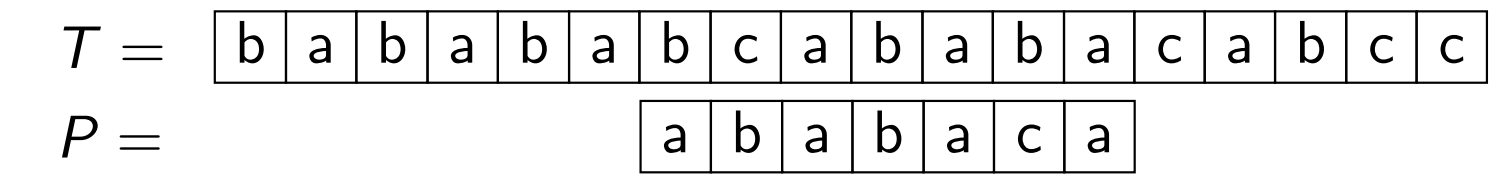
shifts:

`a`: 2, `b`: 3, `c`: 1

Der Horspool-Algorithmus

Mustersuche mit dem Horspool-Algorithmus:

```
1 while True:
2     while last < n and T[last] != last_P:
3         last += shifts[T[last]]
4     if last >= n:  break
5     if T[last-m+1:last] == P[:m-1]:
6         yield (last-m+1, last+1)
7     last += shifts[last_P]
```



last = 12

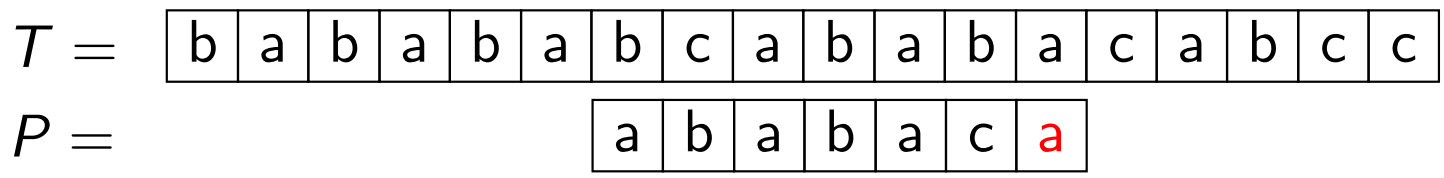
shifts:

`a`: 2, `b`: 3, `c`: 1

Der Horspool-Algorithmus

Mustersuche mit dem Horspool-Algorithmus:

```
1 while True:
2     while last < n and T[last] != last_P:
3         last += shifts[T[last]]
4     if last >= n:  break
5     if T[last-m+1:last] == P[:m-1]:
6         yield (last-m+1, last+1)
7     last += shifts[last_P]
```



Der Horspool-Algorithmus

Mustersuche mit dem Horspool-Algorithmus:

```
1 while True:
2     while last < n and T[last] != last_P:
3         last += shifts[T[last]]
4     if last >= n:  break
5     if T[last-m+1:last] == P[:m-1]:
6         yield (last-m+1, last+1)
7     last += shifts[last_P]
```

$T =$ | b | a | b | a | b | a | b | c | a | b | a | b | a | c | a | b | c | c |

$P =$ | a | b | a | b | a | c | a |

$last =$ 14

shifts:

a: 2, b: 3, c: 1

Der Horspool-Algorithmus

Mustersuche mit dem Horspool-Algorithmus:

```
1 while True:
2     while last < n and T[last] != last_P:
3         last += shifts[T[last]]
4     if last >= n:  break
5     if T[last-m+1:last] == P[:m-1]:
6         yield (last-m+1, last+1)
7     last += shifts[last_P]
```

$T =$ | b | a | b | a | b | a | b | c | a | b | a | b | a | c | a | b | c | c |

$P =$ | a | b | a | b | a | c | a |

$last =$ 14

shifts:

a: 2, b: 3, c: 1

Der Horspool-Algorithmus

Mustersuche mit dem Horspool-Algorithmus:

```
1 while True:
2     while last < n and T[last] != last_P:
3         last += shifts[T[last]]
4     if last >= n:  break
5     if T[last-m+1:last] == P[:m-1]:
6         yield (last-m+1, last+1)
7     last += shifts[last_P]
```

$T =$ | b | a | b | a | b | a | b | c | a | b | a | b | a | c | a | b | c | c |

$P =$ | a | b | a | b | a | c | a |

$last =$ 14

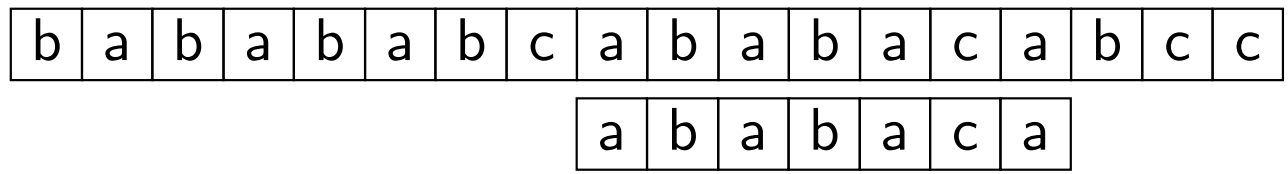
shifts:

a: 2, b: 3, c: 1

Der Horspool-Algorithmus

Mustersuche mit dem Horspool-Algorithmus:

```
1 while True:
2     while last < n and T[last] != last_P:
3         last += shifts[T[last]]
4     if last >= n:  break
5     if T[last-m+1:last] == P[:m-1]:
6         yield (last-m+1, last+1)
7     last += shifts[last_P]
```



last = 14

yield 8, 15

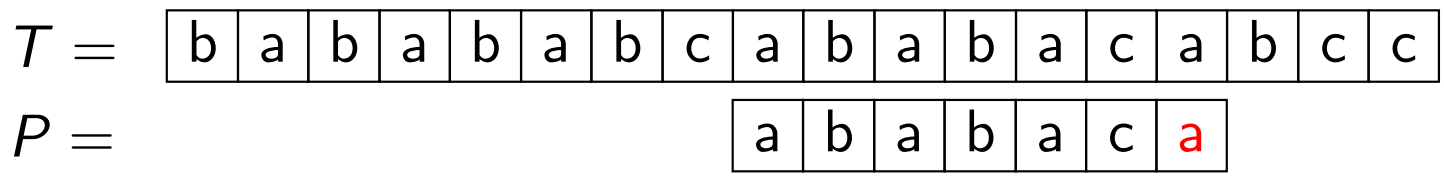
shifts:

`a`: 2, `b`: 3, `c`: 1

Der Horspool-Algorithmus

Mustersuche mit dem Horspool-Algorithmus:

```
1 while True:
2     while last < n and T[last] != last_P:
3         last += shifts[T[last]]
4     if last >= n:  break
5     if T[last-m+1:last] == P[:m-1]:
6         yield (last-m+1, last+1)
7     last += shifts[last_P]
```



last = 14

shifts:

a: 2, b: 3, c: 1

Der Horspool-Algorithmus

Mustersuche mit dem Horspool-Algorithmus:

```
1 while True:
2     while last < n and T[last] != last_P:
3         last += shifts[T[last]]
4     if last >= n:  break
5     if T[last-m+1:last] == P[:m-1]:
6         yield (last-m+1, last+1)
7     last += shifts[last_P]
```

$T =$ | b | a | b | a | b | a | b | c | a | b | a | b | a | c | a | b | c | c |

$P =$ | a | b | a | b | a | c | a |

$last = 16$

shifts:

a: 2, b: 3, c: 1

Der Horspool-Algorithmus

Mustersuche mit dem Horspool-Algorithmus:

```
1 while True:
2     while last < n and T[last] != last_P:
3         last += shifts[T[last]]
4     if last >= n:  break
5     if T[last-m+1:last] == P[:m-1]:
6         yield (last-m+1, last+1)
7     last += shifts[last_P]
```

$T =$ | b | a | b | a | b | a | b | c | a | b | a | b | a | c | a | b | c | c |

$P =$ | a | b | a | b | a | c | a |

$last =$ 16

shifts:

a: 2, b: 3, c: 1

Der Horspool-Algorithmus

Mustersuche mit dem Horspool-Algorithmus:

```
1 while True:
2     while last < n and T[last] != last_P:
3         last += shifts[T[last]]
4     if last >= n:  break
5     if T[last-m+1:last] == P[:m-1]:
6         yield (last-m+1, last+1)
7     last += shifts[last_P]
```

$T =$ | b | a | b | a | b | a | b | c | a | b | a | b | a | c | a | b | c | c |

$P =$ | a | b | a | b | a | c | a |

$last = 17$

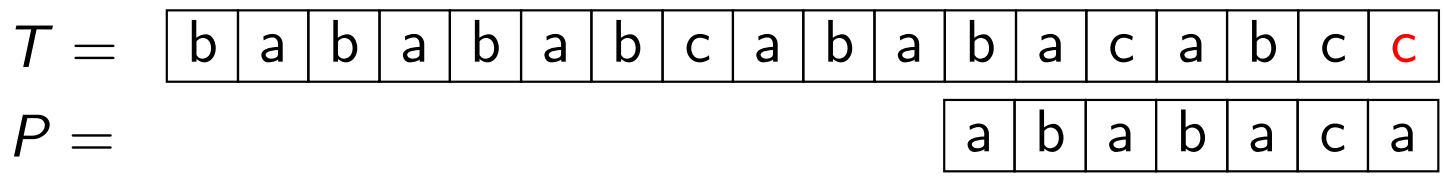
shifts:

a: 2, b: 3, c: 1

Der Horspool-Algorithmus

Mustersuche mit dem Horspool-Algorithmus:

```
1 while True:
2     while last < n and T[last] != last_P:
3         last += shifts[T[last]]
4     if last >= n:  break
5     if T[last-m+1:last] == P[:m-1]:
6         yield (last-m+1, last+1)
7     last += shifts[last_P]
```



$last = 17$

shifts:

a: 2, b: 3, c: 1

Der Horspool-Algorithmus

Mustersuche mit dem Horspool-Algorithmus:

```
1 while True:
2     while last < n and T[last] != last_P:
3         last += shifts[T[last]]
4     if last >= n:  break
5     if T[last-m+1:last] == P[:m-1]:
6         yield (last-m+1, last+1)
7     last += shifts[last_P]
```

$T =$ | b | a | b | a | b | a | b | c | a | b | a | b | a | c | a | b | c | c |

$P =$ | a | b | a | b | a | c | a |

$last = 18$

shifts:

a: 2, b: 3, c: 1

Der Horspool-Algorithmus

Mustersuche mit dem Horspool-Algorithmus:

```
1 while True:
2     while last < n and T[last] != last_P:
3         last += shifts[T[last]]
4     if last >= n:  break
5     if T[last-m+1:last] == P[:m-1]:
6         yield (last-m+1, last+1)
7     last += shifts[last_P]
```

$T =$ | b | a | b | a | b | a | b | c | a | b | a | b | a | c | a | b | c | c |

$P =$ | a | b | a | b | a | c | a |

$last =$ 18

shifts:

a: 2, b: 3, c: 1

Laufzeitanalyse

- Best-case-Laufzeit: $\Omega(m + n/m)$
- Worst-case-Laufzeit: $\mathcal{O}(nm)$.

Laufzeitanalyse

- Best-case-Laufzeit: $\Omega(m + n/m)$
- Worst-case-Laufzeit: $\mathcal{O}(nm)$.
- Der Horspool-Algorithmus ist eine vereinfachte Version des *Boyer-Moore*-Algorithmus, welcher auch eine Best-case-Laufzeit von $\Omega(m + n/m)$, aber eine Worst-case-Laufzeit von $\mathcal{O}(m + n)$ hat.

Laufzeitanalyse

- Best-case-Laufzeit: $\Omega(m + n/m)$
- Worst-case-Laufzeit: $\mathcal{O}(nm)$.
- Der Horspool-Algorithmus ist eine vereinfachte Version des *Boyer-Moore*-Algorithmus, welcher auch eine Best-case-Laufzeit von $\Omega(m + n/m)$, aber eine Worst-case-Laufzeit von $\mathcal{O}(m + n)$ hat.
- Erwartete Laufzeit: Erwartete Verschiebungslänge in vielen Szenarien $\Theta(m)$, erwartete Laufzeit für Suche dann $\mathcal{O}(n/m)$. Nicht für "kleine Alphabete"

Laufzeitanalyse

- Sei Σ_P die Menge der Zeichen in P
- Zeichen in $\Sigma \setminus \Sigma_P$ haben Shiftlänge m.
- Worst case: Die Zeichen in Σ_P haben kleinstmögliche Shiftlängen $1, \ldots, |\Sigma_P|$.
- Annahme: Text ist zufällig i.i.d.; d.h. letztes Zeichen jedes Suchfensters ist zufällig.

Laufzeitanalyse

- Sei Σ_P die Menge der Zeichen in P
- Zeichen in $\Sigma \setminus \Sigma_P$ haben Shiftlänge m.
- Worst case: Die Zeichen in Σ_P haben kleinstmögliche Shiftlängen $1, \ldots, |\Sigma_P|$.
- Annahme: Text ist zufällig i.i.d.; d.h. letztes Zeichen jedes Suchfensters ist zufällig.

Erwartete Shiftlänge s erfüllt:

$$s \geq \frac{\sum_{i=1}^{|\Sigma_P|} i + (|\Sigma| - |\Sigma_P|) \cdot m}{|\Sigma|} = \frac{|\Sigma_P|(|\Sigma_P| + 1)}{2|\Sigma|} + m\left(1 - \frac{|\Sigma_P|}{|\Sigma|}\right).$$

Laufzeitanalyse

- Sei Σ_P die Menge der Zeichen in P
- Zeichen in $\Sigma \setminus \Sigma_P$ haben Shiftlänge m.
- Worst case: Die Zeichen in Σ_P haben kleinstmögliche Shiftlängen $1, \ldots, |\Sigma_P|$.
- Annahme: Text ist zufällig i.i.d.; d.h. letztes Zeichen jedes Suchfensters ist zufällig.

Erwartete Shiftlänge s erfüllt:

$$s \geq \frac{\sum_{i=1}^{|\Sigma_P|} i + (|\Sigma| - |\Sigma_P|) \cdot m}{|\Sigma|} = \frac{|\Sigma_P|(|\Sigma_P| + 1)}{2|\Sigma|} + m\left(1 - \frac{|\Sigma_P|}{|\Sigma|}\right).$$

Also $s \in \Theta(m)$, sobald $|\Sigma| > |\Sigma_P|$ oder $\Sigma_P \in \Theta(m)$.
Fall $|\Sigma| = |\Sigma_P| \in O(1)$ liefert konstantes $\tilde{s}$.

Zusammenfassung: Horspool

- Verschiebungen des Suchfensters um bis zu m Zeichen; dadurch Laufzeit $\Theta(m + n/m)$ möglich
- Horspool-Algorithmus ist einfach und daher schnell (bei großem Alphabet und/oder $|\Sigma_P| \ll |\Sigma|$)
- Verschiebungen nicht optimal
- Idee: Bessere Verschiebungen mit mehr Informationen?

Längere Verschiebungen ?

- Mehr Informationen pro Suchfenster sammeln:
  Längstes Suffix des Suchfensters, das auch Teilstring / Präfix des Musters ist?
- Eine Datenstruktur hierfür muss erlauben:
  - einem gelesenen Fenster von rechts nach links Zeichen anzufügen,
  - festzustellen, ob der bisher gelesene Teil ein Teilstring des Patterns ist,
  - festzustellen, ob der bisher gelesene Teil sogar ein Präfix des Patterns ist.

Der Suffixautomat

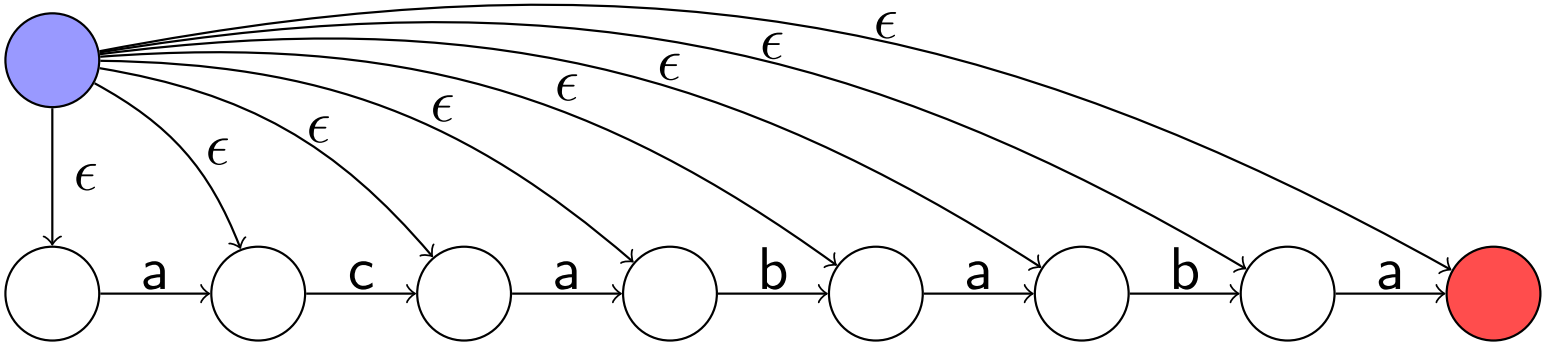
Der **Suffixautomat** für den String x ist ein Automat mit folgenden Eigenschaften:

- Es existiert vom Startzustand aus ein Pfad mit Label y genau dann, wenn y ein Teilstring von x ist.
- Der Pfad mit Label y endet genau dann in einem akzeptierenden Zustand, wenn y ein Suffix von x ist.
- Es muss nicht zu jedem Zustand und jedem Buchstaben eine ausgehende Kante geben.

Wird der Suffixautomat für das reverse Pattern P^{rev} zu P konstruiert, so erlaubt die zweite Eigenschaft das Erkennen von Präfixen von P.

Der Suffixautomat

$P = \texttt{ababaca}$



Suffixautomat für das reverse Pattern $P^{\text{rev}} = \texttt{acababa}$.

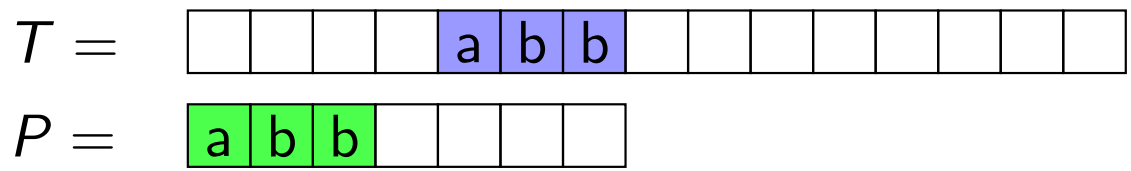
Eigenschaften:

- Zu Beginn alle Zustände aktiv.
- Aktive Zustände, solange gelesene Zeichenfolge Teilstring des Musters ist.
- Akzeptiert, wenn Suffix des Musters gelesen wurde.

Backward Nondeterministic DAWG Matching (BNDM)

UA RUHR

- Suffixautomat ist DAWG: *directed acyclic word graph*
- Suffixautomat wird zu P^{rev} konstruiert
- Bitparallele Realisierung, ähnlich Shift-And (für $|P| \leq W$)
  Aktive Zustandsmenge wird durch Verschieben und Ver*und*en mit Masken aktualisiert
- Präfix $P[:j]$ gefunden, wenn akzeptierend nach j gelesenen Zeichen



  - Ist $j = m$, dann wird ein Match gemeldet.
  - Ist $0 \leq j < m$, wird j als *lastsuffix* gespeichert.
- Das Suchfenster wird um $m - \mathit{lastsuffix}$ Positionen verschoben.

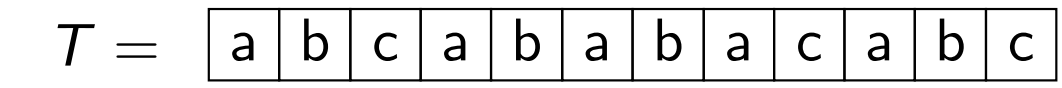
Der BNDM-Algorithmus

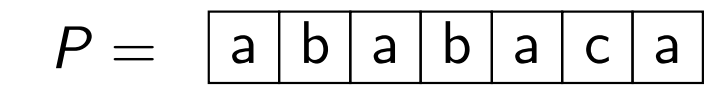
```
1 def bndm(P, T):
2     m, n = len(P), len(T)
3     full = (1 << m) - 1  # m ones
4     accept = 1 << (m - 1)
5     masks = create_masks(P[::-1], set(P+T))
6     last = m  # Position direkt hinter Suchfenster
7     ...
```

Schleife des BNDM-Algorithmus

```
1     ...
2     while last <= n:
3         A = full
4         lastsuffix = 0
5         j = 1
6         while A:
7             A &= masks[T[last-j]]
8             if A & accept:
9                 if j == m:
10                    yield (last-m, last)
11                    break
12                else:
13                    lastsuffix = j
14            j += 1
15            A <<= 1
16        last += m-lastsuffix
```

BNDM: Beispiel



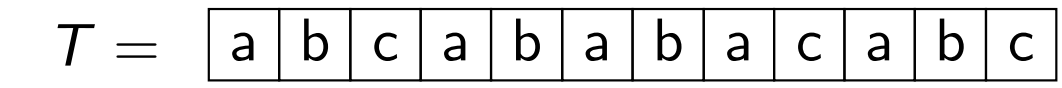


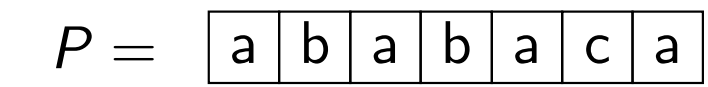
last = 7 j = - A = $^-$

mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

lastsuffix = -

BNDM: Beispiel





last = 7 j = - A = $^-$

mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

lastsuffix = -

BNDM: Beispiel

UA RUHR

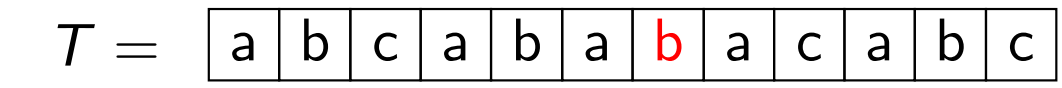
$T =$ | a | b | c | a | b | a | b | a | c | a | b | c |

$P =$ | a | b | a | b | a | c | a |

mask:
a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

$last = 7 \quad j = 1 \quad A = 1111111 \quad lastsuffix = 0$

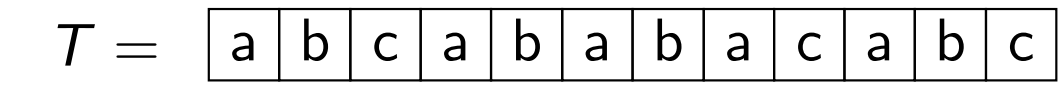
BNDM: Beispiel

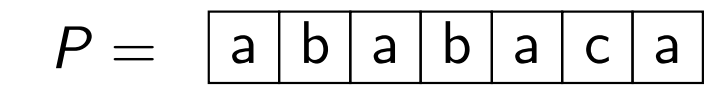


mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 7 j = 1 A = 1111111 *lastsuffix* = 0

BNDM: Beispiel



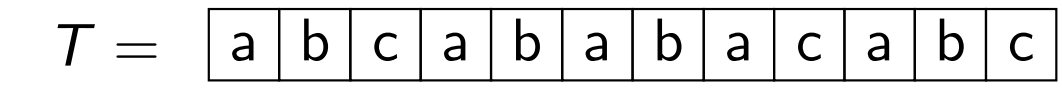


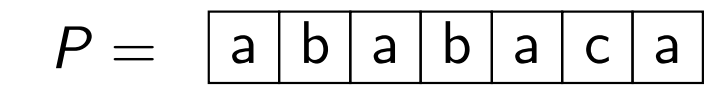
mask:

```
a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010
```

last = 7 j = 1 A = 0101000 *lastsuffix* = 0

BNDM: Beispiel



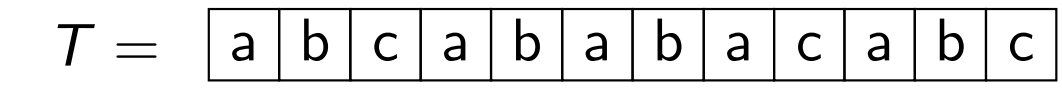


mask:

```
a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010
```

last = 7 j = 1 A = 0101000 *lastsuffix* = 0

BNDM: Beispiel

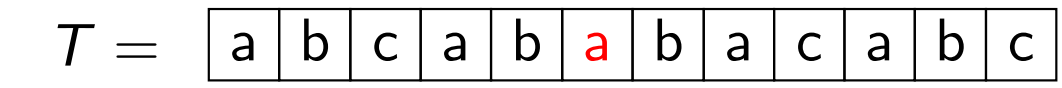


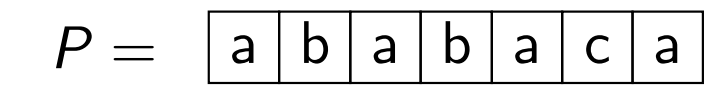
mask:

a:	1010101
b:	0101000
c:	0000010

last = 7 j = 2 A = 1010000 *lastsuffix* = 0

BNDM: Beispiel

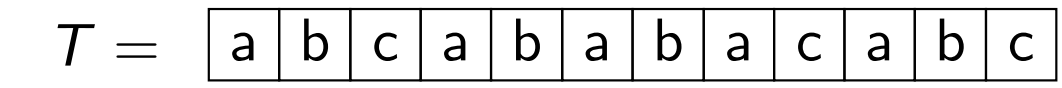




mask: `a: 1010101`
`b: 0101000`
`c: 0000010`

last = 7 j = 2 A = `1010000` *lastsuffix* = 0

BNDM: Beispiel

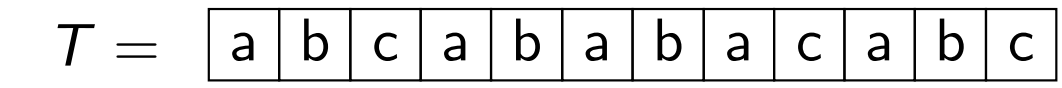


mask:

a:	1010101
b:	0101000
c:	0000010

last = 7 j = 2 A = 1010000 *lastsuffix* = 0

BNDM: Beispiel

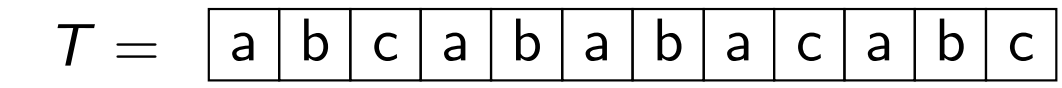


mask:

a:	1010101
b:	0101000
c:	0000010

last = 7 j = 2 A = 1010000 *lastsuffix* = 0

BNDM: Beispiel

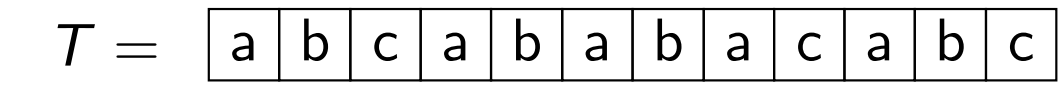


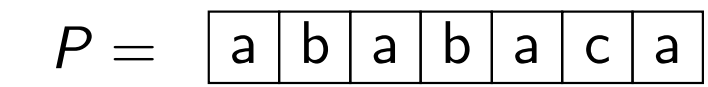
mask:

a:	1010101
b:	0101000
c:	0000010

last = 7 j = 2 A = 1010000 *lastsuffix* = 0

BNDM: Beispiel



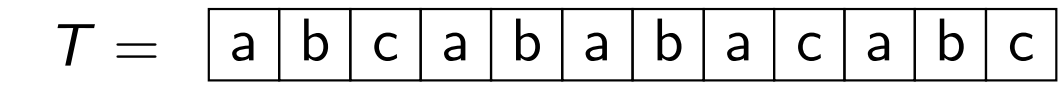


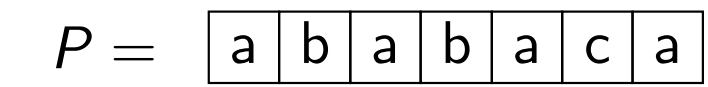
mask:

```
a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010
```

last = 7 j = 2 A = 1010000 *lastsuffix* = 2

BNDM: Beispiel



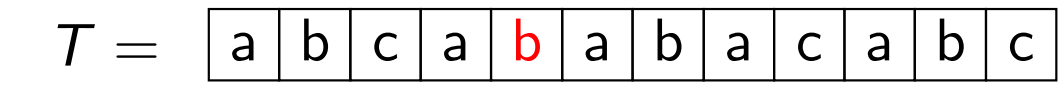


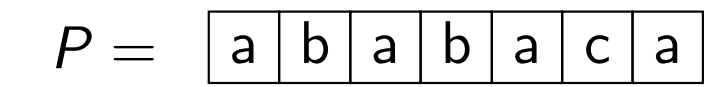
mask:

```
a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010
```

last = 7 j = 3 A = 0100000 *lastsuffix* = 2

BNDM: Beispiel



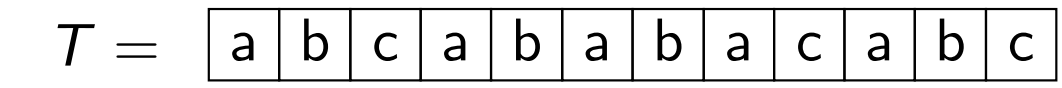


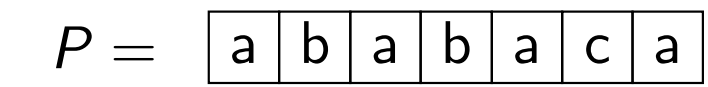
mask:

```
a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010
```

last = 7 j = 3 A = 0100000 *lastsuffix* = 2

BNDM: Beispiel



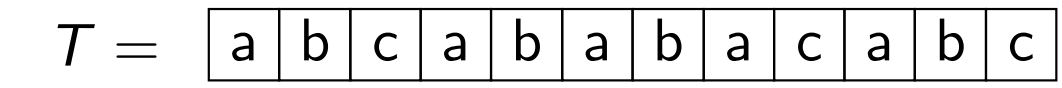


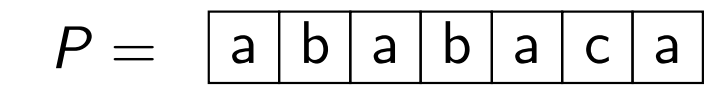
mask:

```
a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010
```

last = 7 j = 3 A = 0100000 *lastsuffix* = 2

BNDM: Beispiel



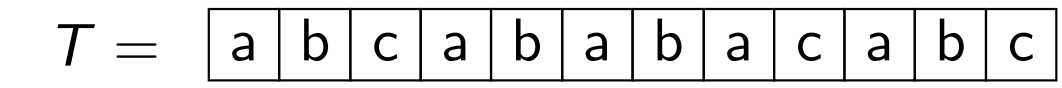


mask:

```
a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010
```

last = 7 j = 3 A = 0100000 *lastsuffix* = 2

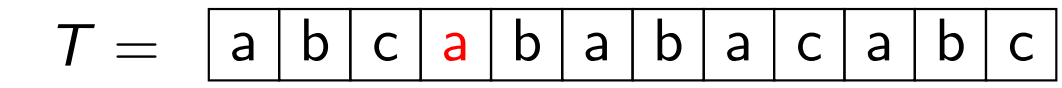
BNDM: Beispiel

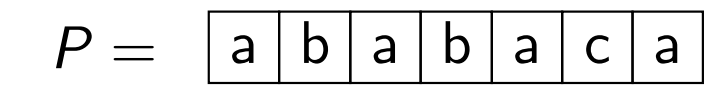


mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 7 j = 4 A = 1000000 *lastsuffix* = 2

BNDM: Beispiel

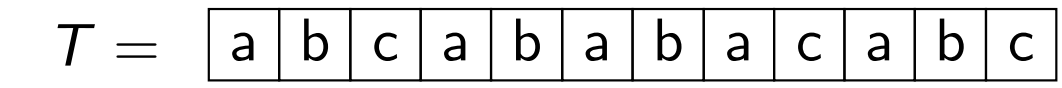




mask: `a: 1010101`
`b: 0101000`
`c: 0000010`

last = 7 j = 4 A = `1000000` *lastsuffix* = 2

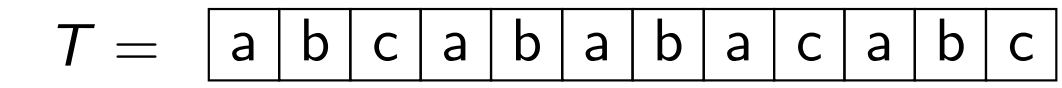
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 7 j = 4 A = 1000000 *lastsuffix* = 2

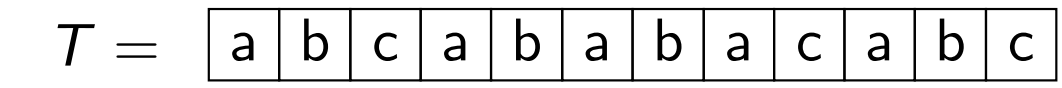
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 7 j = 4 A = 1000000 *lastsuffix* = 2

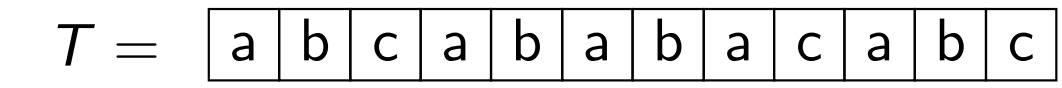
BNDM: Beispiel

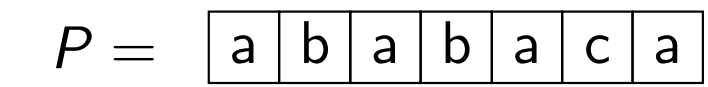


mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 7 j = 4 A = 1000000 *lastsuffix* = 2

BNDM: Beispiel

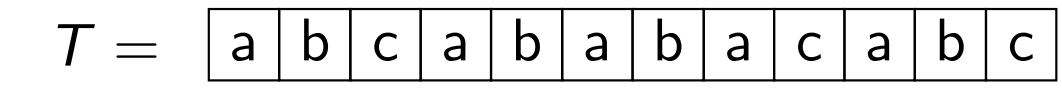


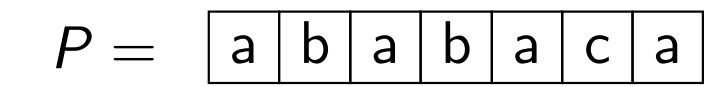


mask: `a: 1010101`
`b: 0101000`
`c: 0000010`

last = 7 j = 4 A = `1000000` *lastsuffix* = 4

BNDM: Beispiel

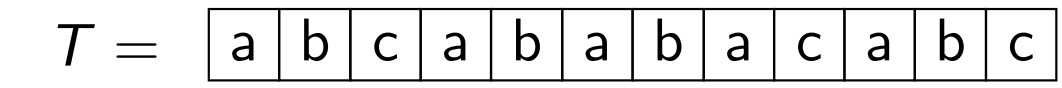


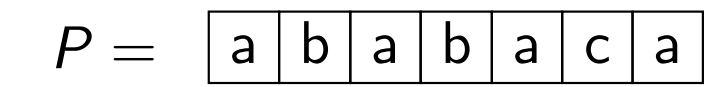


mask: `a: 1010101`
`b: 0101000`
`c: 0000010`

last = 7 j = 5 A = `0000000` *lastsuffix* = 4

BNDM: Beispiel

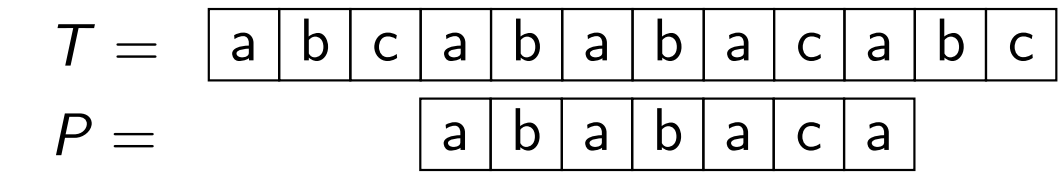




mask: `a: 1010101`
`b: 0101000`
`c: 0000010`

last = 7 j = 5 A = `0000000` *lastsuffix* = 4

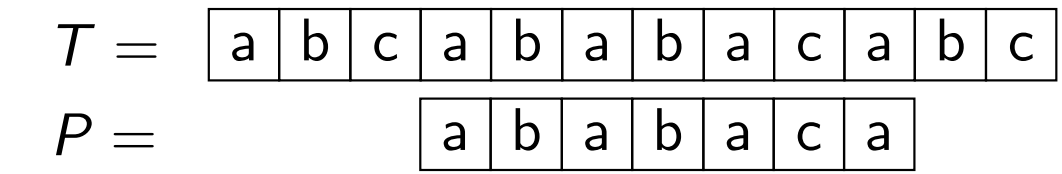
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 5 A = 0000000 *lastsuffix* = 4

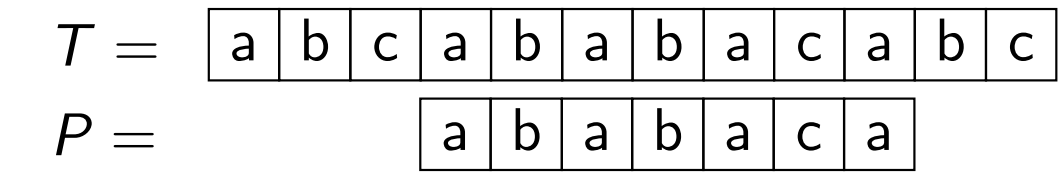
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 5 A = 0000000 *lastsuffix* = 4

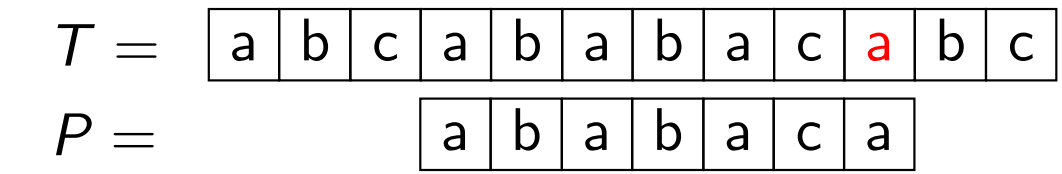
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 1 A = 1111111 *lastsuffix* = 0

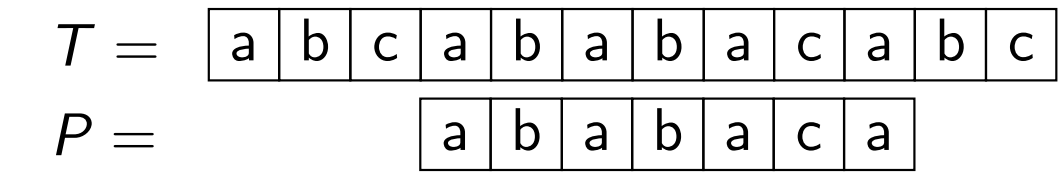
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 1 A = 1111111 *lastsuffix* = 0

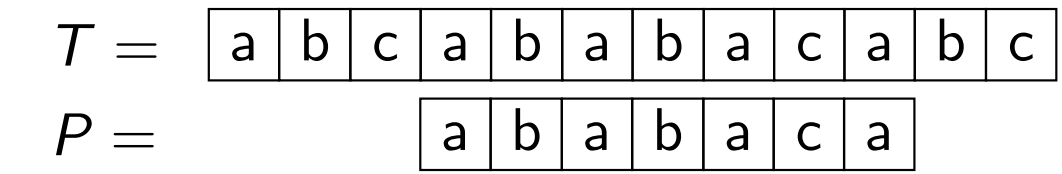
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 1 A = 1010101 *lastsuffix* = 0

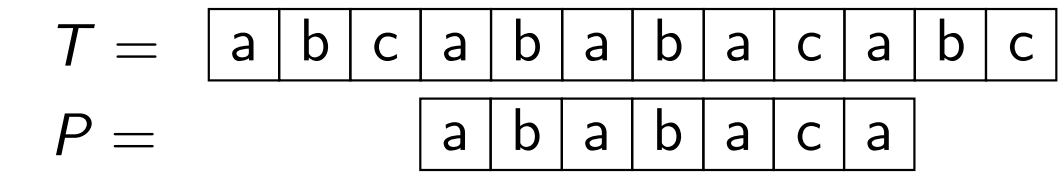
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 1 A = 1010101 *lastsuffix* = 0

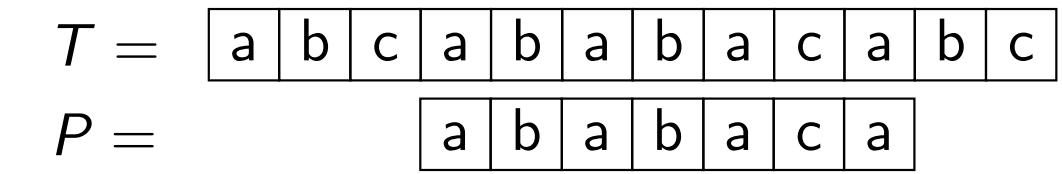
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 1 A = 1010101 *lastsuffix* = 0

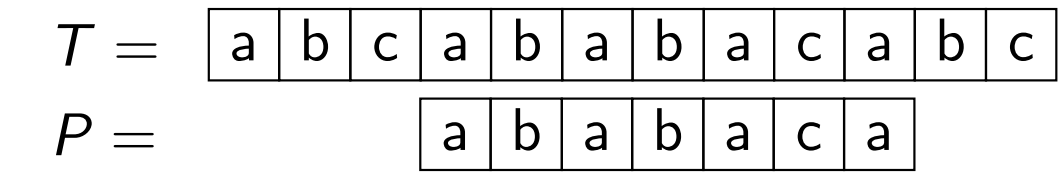
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 1 A = 1010101 *lastsuffix* = 1

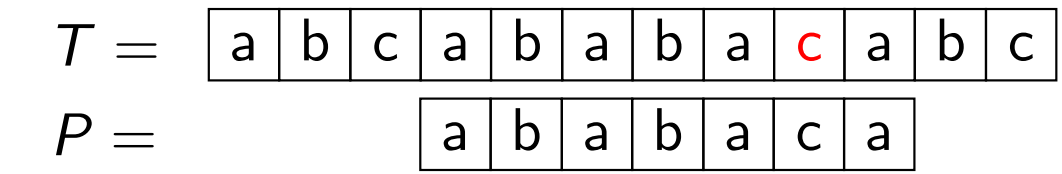
BNDM: Beispiel



mask: `a: 1010101` `b: 0101000` `c: 0000010`

last = 10 j = 2 A = `0101010` *lastsuffix* = 1

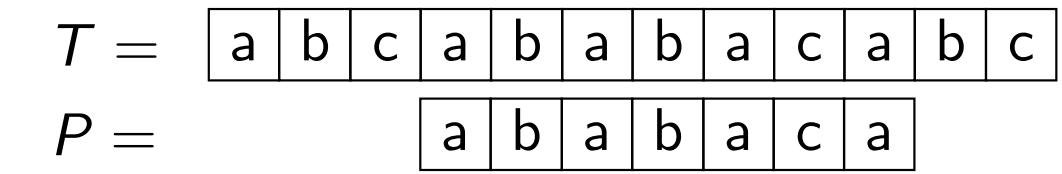
BNDM: Beispiel



mask:
a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 2 A = 0101010 *lastsuffix* = 1

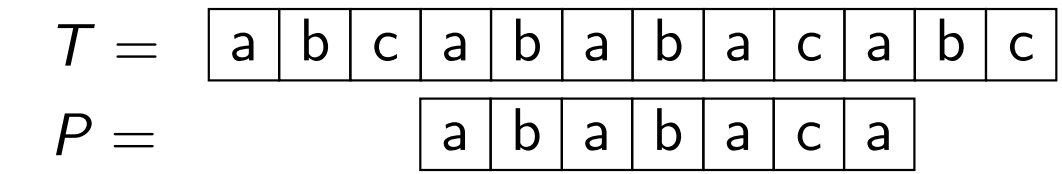
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 2 A = 0000010 *lastsuffix* = 1

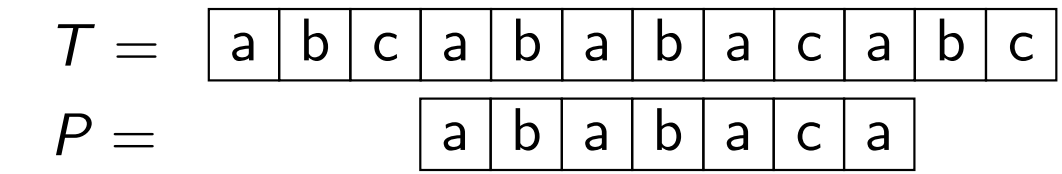
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 2 A = 0000010 *lastsuffix* = 1

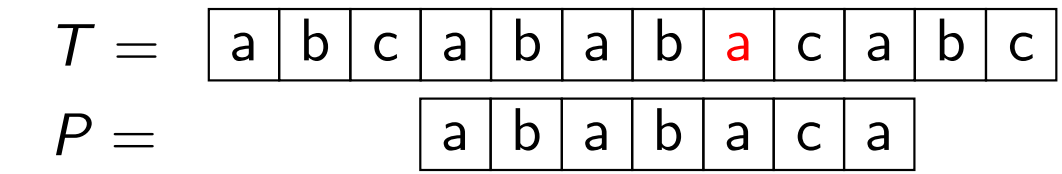
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 3 A = 0000100 *lastsuffix* = 1

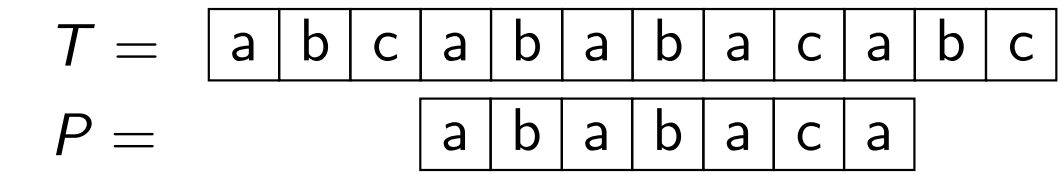
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 3 A = 0000100 *lastsuffix* = 1

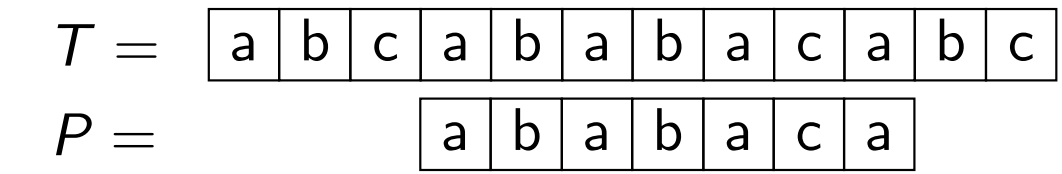
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 3 A = 0000100 *lastsuffix* = 1

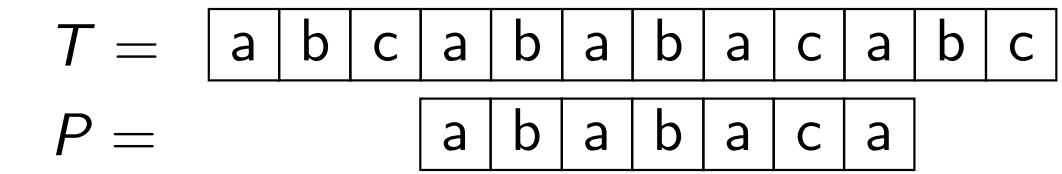
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 3 A = 0000100 *lastsuffix* = 1

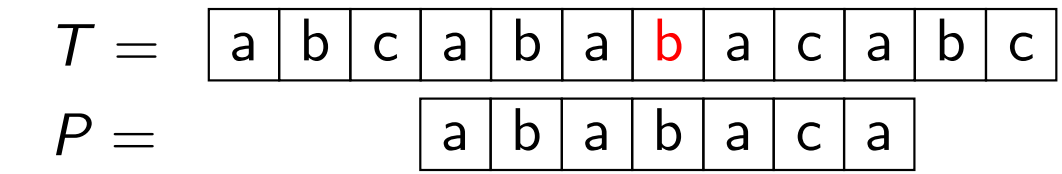
BNDM: Beispiel



mask:
a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 4 A = 0001000 *lastsuffix* = 1

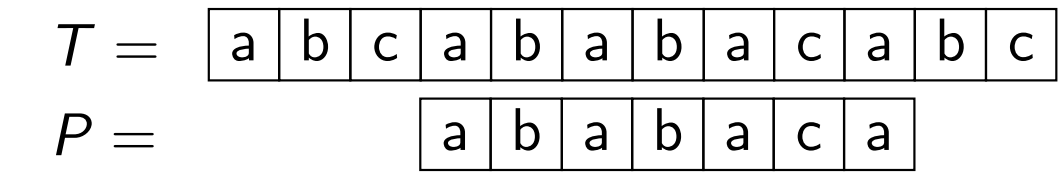
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 4 A = 0001000 *lastsuffix* = 1

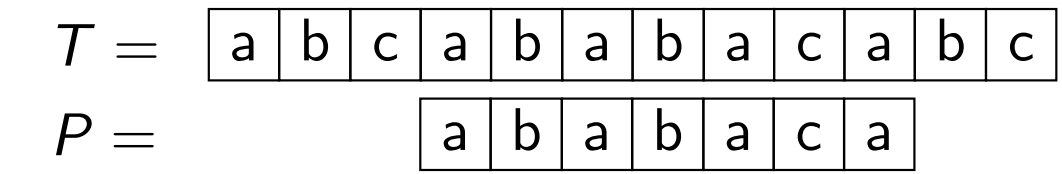
BNDM: Beispiel



mask:
a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 4 A = 0001000 *lastsuffix* = 1

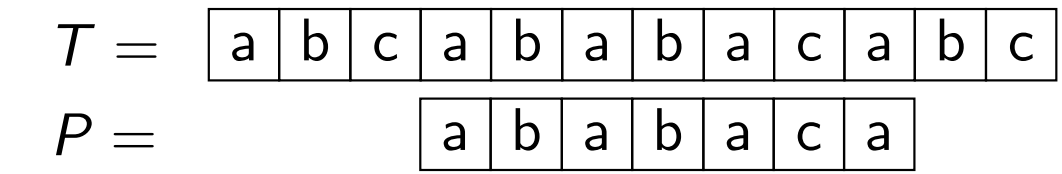
BNDM: Beispiel



mask:
a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 4 A = 0001000 *lastsuffix* = 1

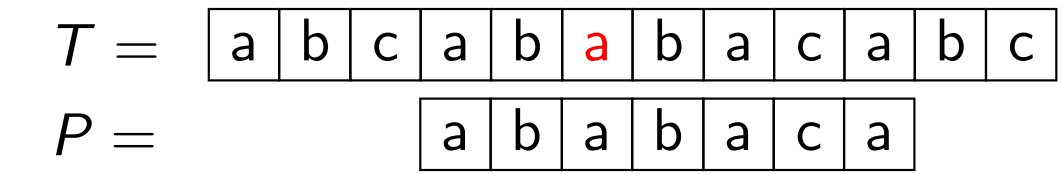
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 5 A = 0010000 *lastsuffix* = 1

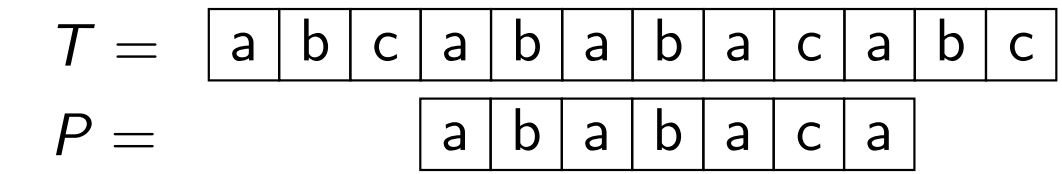
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 5 A = 0010000 *lastsuffix* = 1

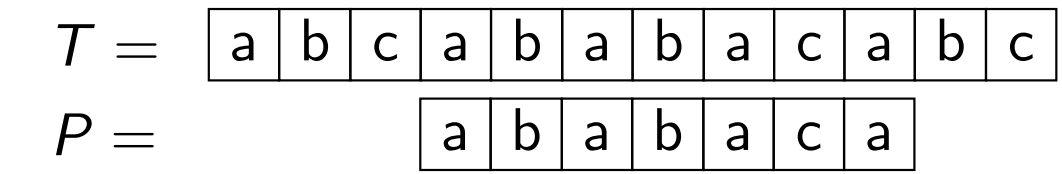
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 5 A = 0010000 *lastsuffix* = 1

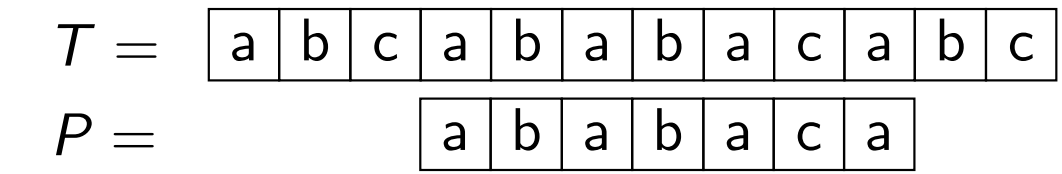
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 5 A = 0010000 *lastsuffix* = 1

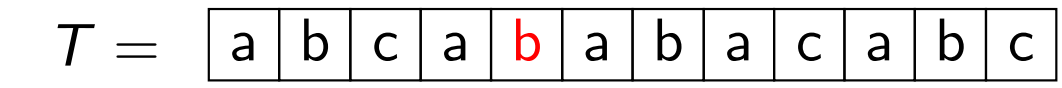
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 6 A = 0100000 *lastsuffix* = 1

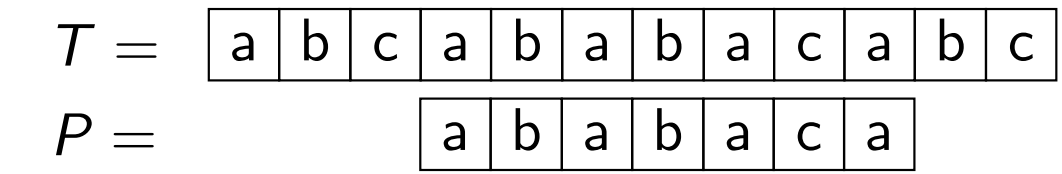
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 6 A = 0100000 *lastsuffix* = 1

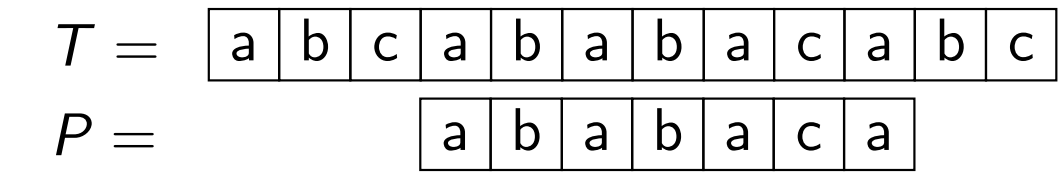
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 6 A = 0100000 *lastsuffix* = 1

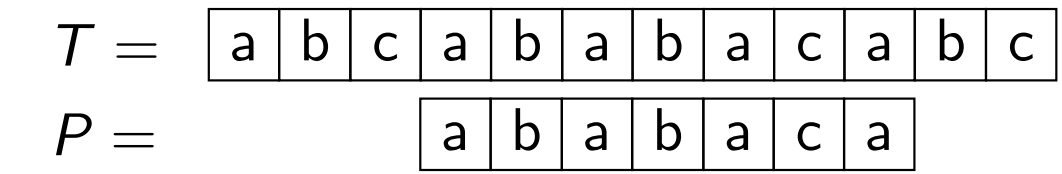
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 6 A = 0100000 *lastsuffix* = 1

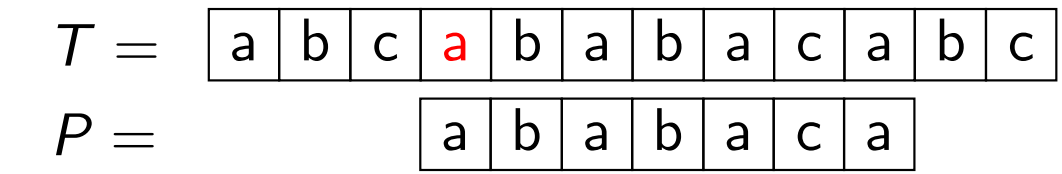
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 7 A = 1000000 *lastsuffix* = 1

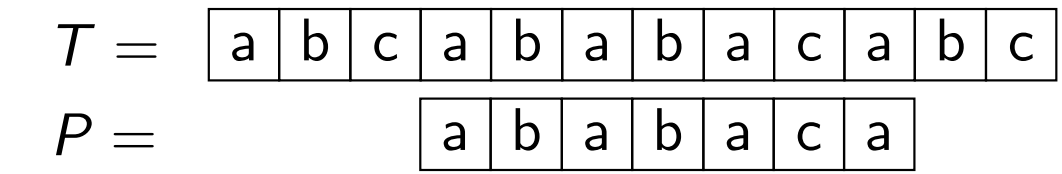
BNDM: Beispiel



mask:
a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 7 A = 1000000 *lastsuffix* = 1

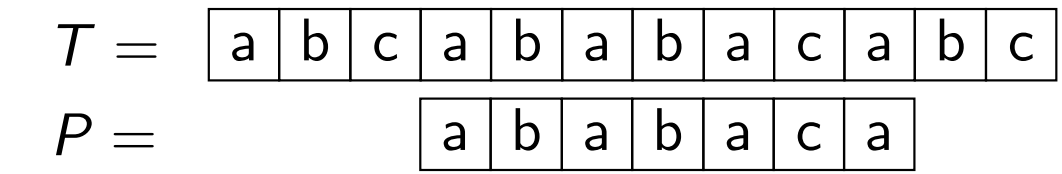
BNDM: Beispiel



mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 7 A = 1000000 *lastsuffix* = 1

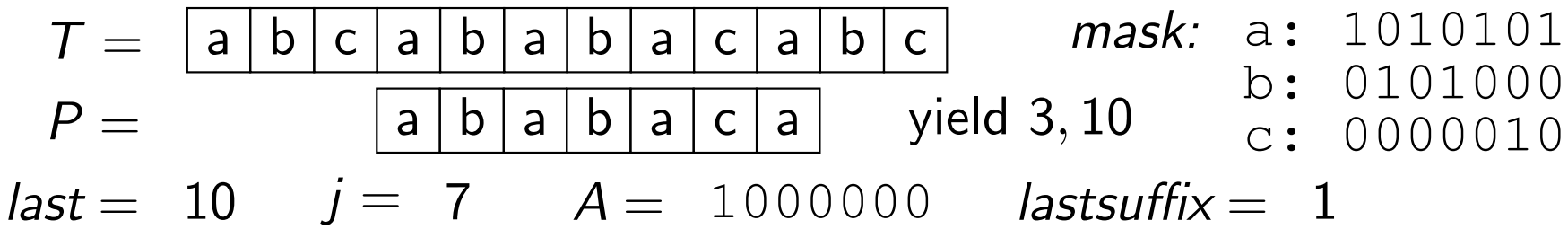
BNDM: Beispiel



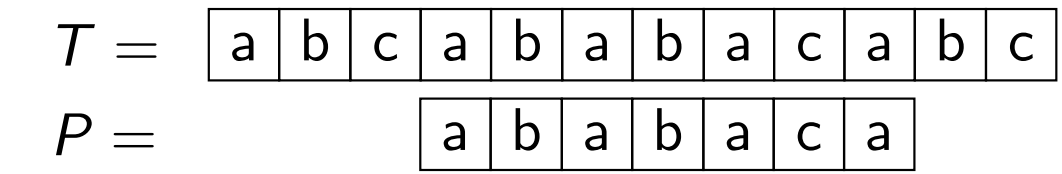
mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 7 A = 1000000 *lastsuffix* = 1

BNDM: Beispiel



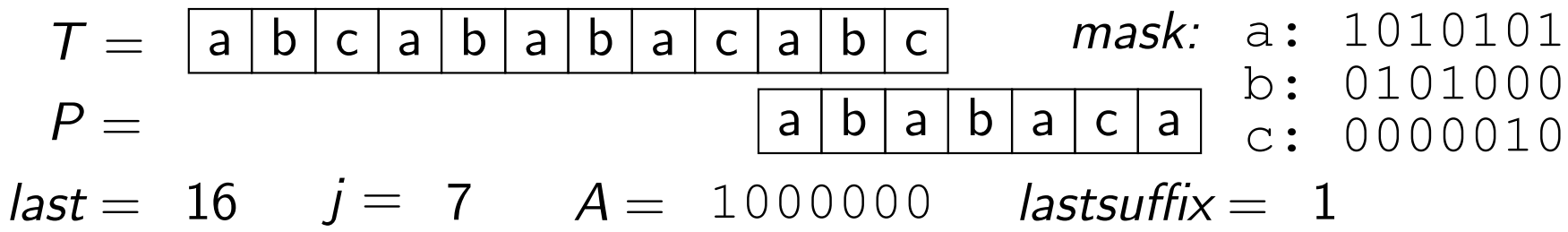
BNDM: Beispiel



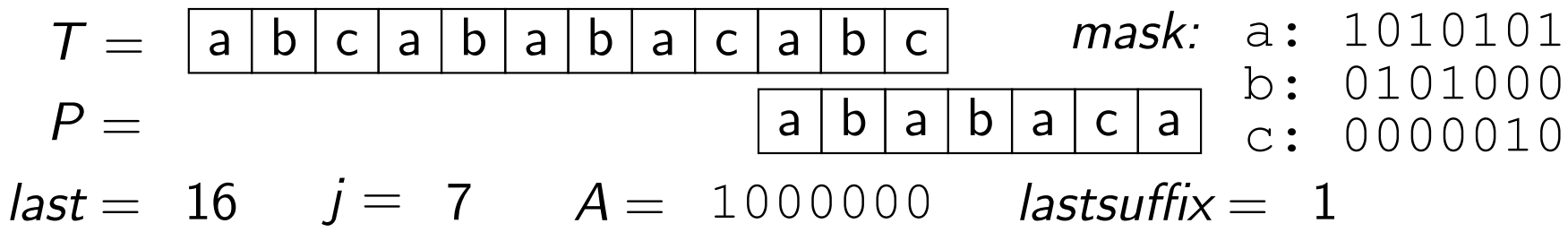
mask: a: 1010101
b: 0101000
c: 0000010

last = 10 j = 7 A = 1000000 *lastsuffix* = 1

BNDM: Beispiel



BNDM: Beispiel



BNDM: Zusammenfassung

- BNDM nutzt nichtdeterministischen Suffixautomaten zu P^{rev}, um Präfixe des Musters im Suchfenster zu finden.
- BNDM nutzt Bitparallelismus zur Simulation des Suffixautomaten ($|P| < W$)
- Deterministisch z.B. mit Suffixbaum zu P^{rev} (später)
- Längere Shifts als Horspool vs. mehr Aufwand pro Fenster
- Best-case Laufzeit $\mathcal{O}(m + n/m)$,
- Worst-case Laufzeit $\mathcal{O}(m + nm)$

Algorithmen im Überblick

Algorithmus	*Best-case*	*Worst-case*	*Speicher*
Naiv	$\Omega(n)$	$\mathcal{O}(mn)$	$\mathcal{O}(1)$
KMP	$\Omega(m+n)$	$\mathcal{O}(m+n)$	$\mathcal{O}(m)$
Shift-And*	$\Omega(m+n)$	$\mathcal{O}(m+n)$	$\mathcal{O}(\lvert\Sigma\rvert)$
Horspool	$\Omega(m+n/m)$	$\mathcal{O}(mn)$	$\mathcal{O}(m+\lvert\Sigma\rvert)$
BNDM*	$\Omega(m+n/m)$	$\mathcal{O}(mn)$	$\mathcal{O}(m+\lvert\Sigma\rvert)$

*: bit-parallel, $|P| <$ Registerbreite

Algorithmen im Überblick

Algorithmus	*Best-case*	*Worst-case*	*Speicher*
Naiv	$\Omega(n)$	$\mathcal{O}(mn)$	$\mathcal{O}(1)$
KMP	$\Omega(m+n)$	$\mathcal{O}(m+n)$	$\mathcal{O}(m)$
Shift-And*	$\Omega(m+n)$	$\mathcal{O}(m+n)$	$\mathcal{O}(\lvert\Sigma\rvert)$
Horspool	$\Omega(m+n/m)$	$\mathcal{O}(mn)$	$\mathcal{O}(m+\lvert\Sigma\rvert)$
BNDM*	$\Omega(m+n/m)$	$\mathcal{O}(mn)$	$\mathcal{O}(m+\lvert\Sigma\rvert)$

*: bit-parallel, $|P| <$ Registerbreite

Diskussion: Welcher Algorithmus für welches Szenario?