Aufgabe 5.3
Duale Simplexverfahren

Knut Krause Thomas Siwczyk Stefan Tittel

Technische Universität Dortmund
Fakultät für Informatik

Algorithmen und Datenstrukturen
15. Januar 2009

Gliederung

Gliederung

Aufgabenstellung

Erläutern Sie das duale Simplexverfahren (Tableau-Methode und revidierte Simplex-Methode) und veranschaulichen Sie das Verfahren anhand eines Beispiels.

Motivation

- Lösung eines LPs, welches weder in kanonischer Form vorliegt, noch leicht in diese transformiert werden kann

Beispiel

$$
\begin{array}{llcl}
\max & F(x_1, x_2) & = & 2x_1 + x_2 \\
\text{s. t.} & x_1 + x_2 & \geq & 8 \\
 & 3x_1 + x_2 & \geq & 12 \\
 & x_1 + x_2 & \leq & 10 \\
 & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

- Erweiterung eines LPs, zu dem eine optimale Lösung besteht, die nach der Erweiterung des LPs keine Lösung mehr ist

Gliederung

Gliederung

Überblick

- finde zulässige (nicht notwendigerweise optimale) Basislösung für das Problem
- übergib diese Basislösung an primalen Simplex
- falls Start mit *dual zulässiger*[1] Lösung, so ist erste primal zulässige Basislösung zugleich optimal
- Schritt 1 und 2 (Wahl von Pivotzeile und Pivotspalte) anders als beim primalen Algorithmus
- Schritt 3 (Tableautransformation/Matrizenrechnung) identisch zum primalen Algorithmus

[1] alle Eintragungen in der F-Zeile ≥ 0

Umwandlung des Ausgangsproblems

- Umformung des Ausgangsproblems in kanonische Form mit Schlupfvariablen, aber negative b_i zulässig

Beispiel – der kanonischen Form zugrundeliegendes LGS

$$\begin{aligned} \mathrm{F} &= 2x_1 + x_2 \\ x_3 &= x_1 + x_2 - 8 \\ x_4 &= 3x_1 + x_2 - 12 \\ x_5 &= -x_1 - x_2 + 10 \end{aligned}$$

Start-Tableau/-Matrix

für Tableau-Methode:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	-1	-1	1			-8
x_4	-3	-1		1		-12
x_5	1	1			1	10
F	-2	-1	0	0	0	0

für revidierte Simplex-Methode:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -12 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wahl der Pivotzeile

Voraussetzung

Basislösung eines LPs (muss nicht zulässig sein); aktuelle Eintragungen im Simplextableau seien mit a'_{ij}, b'_i, c'_j bezeichnet

1. gibt es kein $b'_i < 0$: zulässige Basislösung liegt vor $\Rightarrow$ Abbruch
2. sonst: wähle Zeile s mit kleinstem b'_s als Pivotzeile (bei mehreren mit gleichem kleinsten Wert wähle beliebige)

Wahl der Pivotspalte

1. gibt es kein $a'_{sj} < 0$ in Pivotzeile s: Problem hat keine zulässige Basislösung $\Rightarrow$ Abbruch des gesamten Verfahrens
2. ansonsten wähle Spalte t mit

$$\frac{c'_t}{a'_{st}} = \max\left\{\frac{c'_j}{a'_{sj}} \;\middle|\; j = 1, \ldots, n \text{ mit } a'_{st} < 0\right\}$$

als Pivotspalte

Anmerkung

Beim primalen Simplex wird zuerst die Pivotspalte, dann die Pivotzeile ausgewählt, beim dualen ist es andersherum.

Gliederung

Beispiel – Tableau 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	-1	-1	1			-8
x_4	-3	-1		1		-12
x_5	1	1			1	10
F	-2	-1	0	0	0	0

1. Test: Basis-Lösung zulässig? Nein: $x_3 = -8$ und $x_4 = -12$!
2. $b_i = -12$ ist minimal, Zeile 2 wird Pivotzeile
3. $\frac{c_1'}{a_{21}'} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$ und $\frac{c_2'}{a_{22}'} = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow$ Spalte 2 wird Pivotspalte
4. a_{22}' wird Pivotelement

Jetzt: Transformation (wie beim primalen Simplex)!

Beispiel – Tableau 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	2		1	-1		4
x_2	3	1		-1		12
x_5	-2			-1	1	-2
F	1	0	0	-1	0	12

1. Test: Basis-Lösung zulässig? Nein: $x_5 = -2$!
2. $b_i = -2$ ist minimal, Zeile 3 wird Pivotzeile
3. a'_{31} ist einzige Auswahlmöglichkeit, Spalte 1 wird Pivotspalte
4. a'_{31} wird Pivotelement

Jetzt: Transformation (wie beim primalen Simplex)!

Beispiel – Tableau 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3			1		1	2
x_2		1		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	9
x_1	1			$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
F	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	11

1. Test: Basis-Lösung zulässig? Ja! Nun primaler Simplex:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3			1		1	2
x_4		2		1	3	18
x_1	1	1			1	10
F	0	1	0	0	2	20

Optimal: $x_1 = 10, x_3 = 2, x_4 = 18, x_2 = x_5 = 0, F = 20$

Gliederung

$\tilde{A}_1$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & F & b_i \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ -3 & \color{red}{-1} & 0 & 1 & 0 & 0 & -12 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

B_1

$$\begin{array}{c|cccc} & x_2 & x_3 & x_5 & F \\ \hline x_2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ F & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

B_1^{-1}

$$\begin{array}{c|cccc} & x_2 & x_3 & x_5 & F \\ \hline x_2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ x_3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ F & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$\tilde{A}_1 \cdot B_1^{-1}$

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & F & b_i \\
\end{array}
$$
$$
\begin{pmatrix}
3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 12 \\
2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\
\color{red}{-2} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 12
\end{pmatrix}
$$

B_2

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & F \end{array} \\
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ F \end{array} &
\begin{pmatrix}
3 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 0 \\
-2 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

B_2^{-1}

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & F \end{array} \\
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ F \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\
1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$\tilde{A}_2 \cdot B_2^{-1}$

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \mathrm{F} & b_i
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 9 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 11
\end{pmatrix}
$$

- Lösung ist gültige primale Basislösung
- Algorithmusstop

Literatur

Wolfgang Domschke und Andreas Drexl.
Einführung in Operations Research.
Springer, Berlin [u.a.], 2005.