

Lineare Programmierung

Helena Kotthaus, Kyrill Risto, Wolfgang Walz

TU Dortmund

16. Dezember 2008

Übersicht

- 1 Problem
- 2 Modellierung
- 3 Tableau
- 4 Lösung

Problem

Es werden 3 Zutaten eingekauft:

- 2000 Flaschen Macallan (35Euro)
- 2500 Flaschen Cragganmore (25Euro)
- 1200 Flaschen Bruichladdich (20Euro)

3 Mischungen werden angefertigt:

A : hat min. 60% Macallan und max. 20% Bruichladdich

B : hat min. 15% Macallan und max. 60% Bruichladdich

C : hat max. 50% Bruichladdich

Problem

Die 3 Mischungen können zu folgenden Preisen verkauft werden:

A : für 34 Euro die Flasche

B : für 28.50 Euro die Flasche

C : für 22.50 Euro die Flasche

Ziel:

Finde die optimalen Mischungen A , B , C unter Einhaltung der Nebenbedingungen (u.a. Ressourcenbeschränkung)

Problem

Tipp

Eine Mischung kann man vorneweg ausschließen.

Mischung C:

- darf höchstens 50% Bruichladdich enthalten (billigste Zutat, also ausreizen)
- Mischung wird mit zweitbilligster Zutat Cragganmore aufgefüllt (restliche 50%)
- Mischung kostet nun $\frac{1}{2} \cdot (25 + 20) = 22.5 = \text{Verkaufspreis}$
- **unrentabel** \Rightarrow wird nicht mehr berücksichtigt

Modellierung

Nebenbedingungen

Gesamtvorrat an Zutaten wird den Mischungen (A , B) zugeteilt. Die beiden Mischungen können in der Summe nicht mehr bekommen, als vorhanden ist:

$$x_1 + x_4 \leq 2000$$

$$x_2 + x_5 \leq 2500$$

$$x_3 + x_6 \leq 1200$$

Modellierung Nebenbedingungen

Modellierung von „prozentualen“ Nebenbedingungen:

$$\text{„wenigstens } t\% \text{ } x_1\text{“} \hat{=} \frac{x_1}{x_1+x_2+x_3} \geq t$$

$$\Leftrightarrow x_1 \geq tx_1 + tx_2 + tx_3 \Leftrightarrow (t-1)x_1 + tx_2 + tx_3 \leq 0$$

Analog :

$$\text{„höchstens } t\% \text{ } x_1\text{“} \hat{=} \frac{x_1}{x_1+x_2+x_3} \leq t$$

$$\Leftrightarrow x_1 \leq tx_1 + tx_2 + tx_3 \Leftrightarrow (1-t)x_1 - tx_2 - tx_3 \leq 0$$

Modellierung

Nebenbedingungen

Zur Erinnerung:

$$\text{„wenigstens } t\% \text{ } x_1\text{“} \hat{=} (t - 1)x_1 + tx_2 + tx_3 \leq 0$$

$$\text{„höchstens } t\% \text{ } x_1\text{“} \hat{=} (1 - t)x_1 - tx_2 - tx_3 \leq 0$$

Für Mischung A einsetzen:

$$\text{„wenigstens 60\% Macallan“: } -0.4x_1 + 0.6x_2 + 0.6x_3 \leq 0$$

$$\text{„höchstens 20\% Bruichladdich“: } -0.2x_1 - 0.2x_2 + 0.8x_3 \leq 0$$

Für Mischung B einsetzen:

$$\text{„wenigstens 15\% Macallan“: } -0.85x_4 + 0.15x_5 + 0.15x_6 \leq 0$$

$$\text{„höchstens 60\% Bruichladdich“: } -0.6x_4 - 0.6x_5 + 0.4x_6 \leq 0$$

Modellierung

Zielfunktion: Gewinnmaximierung

Def: Gewinn

Gewinn = Umsatz – Kosten

$$\begin{aligned} \text{Umsatz: } & 34 \cdot \left(\sum_{i \in \{1,2,3\}} x_i \right) + 28.5 \cdot \left(\sum_{j \in \{4,5,6\}} x_j \right) = \\ & (34, 34, 34, 28.5, 28.5, 28.5) * (x_1, x_2, \dots, x_6)^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Kosten: } & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 35 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 35 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix} = \\ & (35, 25, 20, 35, 25, 20) * (x_1, x_2, \dots, x_6)^T \end{aligned}$$

$$\text{Kosten: } \max(-1x_1 + 9x_2 + 14x_3 - 6.5x_4 + 3.5x_5 + 8.5x_6)$$

Tableau

LP

$$\max (-1x_1 + 9x_2 + 14x_3 - 6.5x_4 + 3.5x_5 + 8.5x_6)$$

x_1			$+x_4$		\leq	2000	
	x_2			$+x_5$	\leq	2500	
		x_3			\leq	1200	
$-0.4x_1$	$+0.6x_2$	$+0.6x_3$			\leq	0	
$-0.2x_1$	$-0.2x_2$	$+0.8x_3$			\leq	0	
			$-0.85x_4$	$+0.15x_5$	$+0.15x_6$	\leq	0
			$-0.6x_4$	$-0.6x_5$	$+0.4x_6$	\leq	0

Software

Es wurden folgende Implementierungen verwendet:

- *R* (OpenSource-Statistik-Software)
- Java-Applet:
`http://www.uni-leipzig.de/~wifaor/orschuhr/Simplex/InitOSI.html`

Lösungswerte

folgende Eckpunkte ermittelte der Simplex-Algorithmus:

- 1 $Z(0, 0, 0, 0, 0, 0) = 0$
- 2 $Z(0, 0, 0, 0, 0, 0) = 0$
- 3 $Z(0, 0, 0, 0, 0, 0) = 0$
- 4 $Z(0, 0, 0, 300, 500, 1200) = 10000$
- 5 $Z(0, 0, 0, 652, 9412, 2500, 1200) = 14705.8824$
- 6 $Z(0, 0, 0, 652, 9412, 2500, 1200) = 14705.8824$
- 7 $Z(1526.\bar{6}, 508.\bar{8}, 508.\bar{8}, 473.\bar{3}, 1991.\bar{1}, 691.\bar{1}) = 19944.\bar{4}$

Interpretation des Lösungsvektors

$$Z(1526.\bar{6}, 508.\bar{8}, 508.\bar{8}, 473.\bar{3}, 1991.\bar{1}, 691.\bar{1}) = 19944.\bar{4}$$

Mischung $A = (60.03\%M; 19.985\%C; 19.985\%B)$

Mischung $B = (14.\bar{9}\%M; 63.0986\%C; 20.1901\%B)$

Ende

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!
Fragen?

Lösung

Simplextableaus 1/4

Tableau.0

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	b
1,00	-9,00	-14,00	6,50	-3,50	-8,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2000,00
0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2500,00
0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1200,00
-0,40	0,60	0,60	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00
-0,20	-0,20	0,80	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	-0,85	0,15	0,15	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	-0,60	-0,60	0,40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00

Tableau.1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	b
-8,33	5,00	0,00	6,50	-3,50	-8,50	0,00	0,00	0,00	23,33	0,00	0,00	0,00	0,00
1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2000,00
0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2500,00
0,67	-1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	-1,67	0,00	0,00	0,00	1200,00
-0,67	1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,67	0,00	0,00	0,00	0,00
0,33	-1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,33	1,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	-0,85	0,15	0,15	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	-0,60	-0,60	0,40	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00

Lösung

Simplextableaus 2/4

Tableau.2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	b
-8,33	5,00	0,00	-6,25	-16,25	0,00	0,00	0,00	0,00	23,33	0,00	0,00	21,25	0,00
1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2000,00
0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2500,00
0,67	-1,00	0,00	1,50	1,50	0,00	0,00	0,00	1,00	-1,67	0,00	0,00	-2,50	1200,00
-0,67	1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,67	0,00	0,00	0,00	0,00
0,33	-1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,33	1,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	-0,63	0,38	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	-0,38	0,00
0,00	0,00	0,00	-1,50	-1,50	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,50	0,00

Tableau.3

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	b
-8,33	5,00	0,00	-33,33	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	23,33	0,00	43,33	5,00	0,00
1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2000,00
0,00	1,00	0,00	1,67	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	-2,67	1,00	2500,00
0,67	-1,00	0,00	4,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	-1,67	0,00	-4,00	-1,00	1200,00
-0,67	1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,67	0,00	0,00	0,00	0,00
0,33	-1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,33	1,00	0,00	0,00	0,00
0,00	0,00	0,00	-1,67	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,67	-1,00	0,00
0,00	0,00	0,00	-4,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	4,00	1,00	0,00

Lösung

Simplextableaus 3/4

Tableau.4

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	b
-2,78	-3,33	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	8,33	9,44	0,00	10,00	-3,33	10000,00
0,83	0,25	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	-0,25	0,42	0,00	1,00	0,25	1700,00
-0,28	1,42	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	-0,42	0,69	0,00	-1,00	1,42	2000,00
0,17	-0,25	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,25	-0,42	0,00	-1,00	-0,25	300,00
-0,67	1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,67	0,00	0,00	0,00	0,00
0,33	-1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,33	1,00	0,00	0,00	0,00
0,28	-0,42	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,42	-0,69	0,00	1,00	-1,42	500,00
0,67	-1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	-1,67	0,00	0,00	0,00	1200,00

Tableau.5

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	b
-3,43	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,35	7,35	11,08	0,00	7,65	0,00	14705,80
0,88	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	-0,18	-0,18	0,29	0,00	1,18	0,00	1347,05
-0,20	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,71	-0,29	0,49	0,00	-0,71	1,00	1411,76
0,12	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,18	0,18	-0,29	0,00	-1,18	0,00	652,94
-0,67	1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,67	0,00	0,00	0,00	0,00
0,33	-1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,33	1,00	0,00	0,00	0,00
0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2500,00
0,67	-1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	-1,67	0,00	0,00	0,00	1200,00

Lösung

Simplextableaus 4/4

Tableau.6

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	b
0,00	-10,29	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,35	7,35	-2,65	10,29	7,65	0,00	14705,80
0,00	2,65	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	-0,18	-0,18	3,82	-2,65	1,18	0,00	1347,05
0,00	0,41	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,71	-0,29	-0,29	0,59	-0,71	1,00	1411,76
0,00	0,35	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,18	0,18	0,18	-0,35	-1,18	0,00	652,94
0,00	-1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,00	2,00	0,00	0,00	0,00
1,00	-3,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-4,00	3,00	0,00	0,00	0,00
0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2500,00
0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	1,00	1,00	-2,00	0,00	0,00	1200,00

Tableau.7

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	b
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3,89	1,67	6,67	12,22	0,00	12,22	0,00	19944,44
0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,38	-0,07	-0,07	1,44	-1,00	0,44	0,00	508,89
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-0,16	0,73	-0,27	-0,89	1,00	-0,89	1,00	1202,22
0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	-0,13	0,20	0,20	-0,33	0,00	-1,33	0,00	473,33
0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,38	-0,07	-0,07	0,44	1,00	0,44	0,00	508,89
1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,13	-0,20	-0,20	0,33	0,00	1,33	0,00	1526,67
0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	-0,38	1,07	0,07	-1,44	1,00	-0,44	0,00	1991,11
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	-0,38	0,07	1,07	-0,44	-1,00	-0,44	0,00	691,11