Space Filling Curves

Übersicht

1. Einleitung ggf. Vorwissen abgreifen
   - Cantors Erstes Diagonalargument

2. Space Filling Curves
   - Allgemeiner Ansatz
   - Z-Curve (Morton Order, Z-Order)
   - Hilbert-Curve
   - Peano-Curve
   - Gosper-Curve
   - Sierpiński-Curve
   - Moore-Curve

Cantors Erstes Diagonalargument

Space Filling Curves

Cantors Erstes Diagonalargument

- Mathematisches Beweisverfahren für die Mächtigkeit zweier Mengen
- Insbesondere bei unendlichen Mengen

Definition Mächtigkeit:

Zwei Mengen sind genau dann gleichmächtig, wenn jedem Element der einen Menge genau ein Element der anderen Menge zugeordnet werden kann, und umgekehrt ebenso, wenn also eine Bijektion zwischen den Mengen existiert.

Anwendung von Cantors Erstem Diagonalargument

N und Q sind gleichmächtig

Space Filling Curves

Einleitung

Anwendung von Cantors Erstem Diagonalargument

N und Q sind gleichmächtig

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	...
2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	...
3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	...
4/1	4/2	4/3	...		
5/1	5/2	...			
...					

→

1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	...
2/1	2/2	2/3	2/4	...	
3/1	3/2	...			
...					

→ 1, 1/2, 2, 3, 1/3, 1/4, 2/3, ...

Space Filling Curves

Einleitung

Weitere interessantere Anwendung von Cantors Erstem Digonalargument

Die Menge $\{0, 1\}^N$ aller Abbildungen von N nach $\{0, 1\}$ ist überabzählbar.

Beweis siehe Skript Mathe2 für Informatiker, Skutella, SS06

http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsv/lehre/ss2006/mafii/Skript120706.pdf

Das bedeutet: Es gibt nicht-entscheidbare Programme. (siehe auch Komplexitätstheorie)

Space Filling Curves
Allgemeiner Ansatz

Space Filling Curve

im Deutschen auch FASS-Kurve genannt *(space-filling, self-avoiding, simple, self-similar)*
(raumfüllend, selbst-ausweichend, einfach und selbstähnlich)

Definition:

Eine Space-Filling-Curve ist eine eindimensionale Linie, die einen zwei- oder mehrdimensionalen Raum (durch vollständigen Durchlauf) beschreibt.

- 2-d: plane curve
- 3-d: space curve

Z-Curve (Morton Order, Z-Order)

- Entwickelt 1966 von G. M. Morton
- Gute Nachbarschaftseigenschaften / Nachbarschaftserhaltung
- Schnelle und einfache Berechnung der Z-Werte (Bit Interleaving)
- Wie bei allen Space-Filling-Curves: Verwendung einer linearen Datenstruktur

Anmerkung:

Bei der später betrachteten Hilbert-Curve ist die Nachbarschaftserhaltung besser, allerdings die Berechnung der 1-D-Werte erheblich komplizierter.

Space Filling Curves

Z-Curve

Beispiel:

y \ x	0	1	2	3	4	5	6	7
0	000000	000001	000100	000101	010000	010001	010100	010101
1	000010	000011	000110	000111	010010	010011	010110	010111
2	001000	001001	001100	001101	011000	011001	011100	011101
3	001010	001011	001110	001111	011010	011011	011110	011111
4	100000	100001	100100	100101	110000	110001	110100	110101
5	100010	100011	100110	100111	110010	110011	110110	110111
6	101000	101001	101100	101101	111000	111001	111100	111101
7	101010	101011	101110	101111	111010	111011	111110	111111

Space Filling Curves

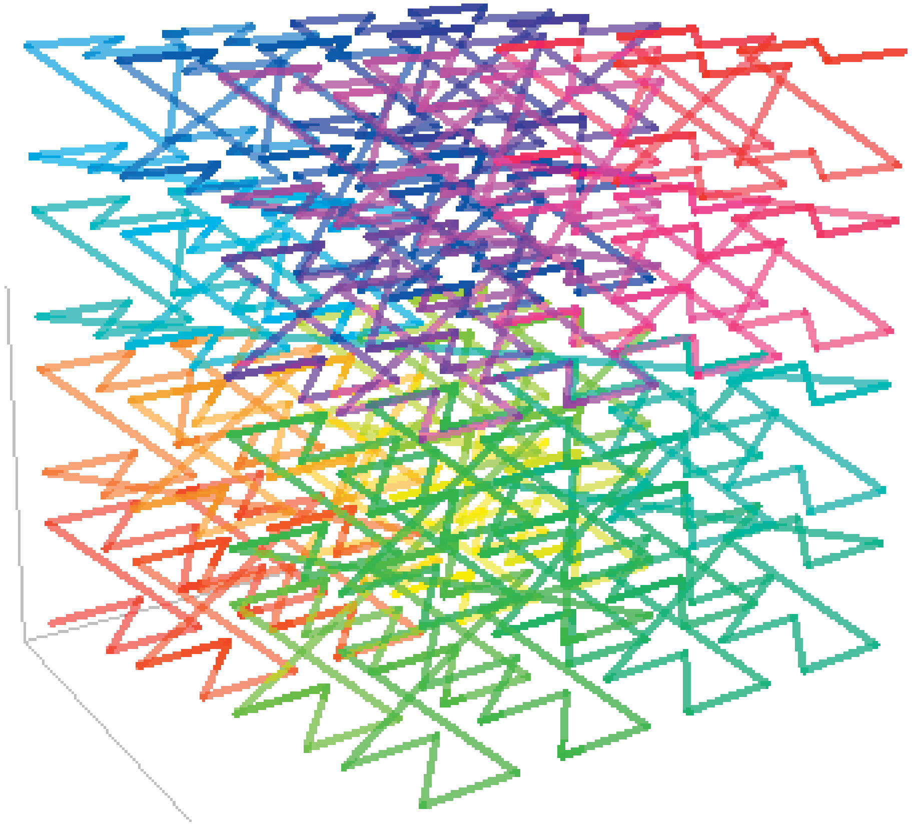
Z-Curve

Beispiel:

y \ x	0	1	2	3	4	5	6	7
0	000000	000001	000100	000101	010000	010001	010100	010101
1	000010	000011	000110	000111	010010	010011	010110	010111
2	001000	001001	001100	001101	011000	011001	011100	011101
3	001010	001011	001110	001111	011010	011011	011110	011111
4	100000	100001	100100	100101	110000	110001	110100	110101
5	100010	100011	100110	100111	110010	110011	110110	110111
6	101000	101001	101100	101101	111000	111001	111100	111101
7	101010	101011	101110	101111	111010	111011	111110	111111

Space Filling Curves
Z-Curve

Beispiel 3-D:



Space Filling Curves

Z-Curve

Suche innerhalb der Z-Werte: (Suche nach höherem Wert im Suchbereich)

y \ x	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	4	5	16	17	20	21
1	2	3	6	7	18	19	22	23
2	8	9	12	13	24	25	28	29
3	10	11	14	15	26	27	30	31
4	32	33	36	37	48	49	52	53
5	34	35	38	39	50	51	54	55
6	40	41	44	45	56	57	60	61
7	42	43	46	47	58	59	62	63

Suchbereich:

x: 2...3

y: 2...6

Durch fortlaufende Z-Werte bestimmtes Suchgebiet

Funktionen:

GetNextZ-address

Space Filling Curves

Z-Curve

Fazit Z-Curve:

- Sehr effizient im hierarchischen Einsatz zur Nachbarschaftssuche
- Häufige Verwendung wegen der einfachen Berechnung der Z-Werte

Aber:

- Teilweise große Sprünge zwischen Nachbarn

Hilbert-Curve

- 1891, David Hilbert (deutscher Mathematiker)
- Mathematisch: Stetige Kurve
- in sich wiederholendes Konstruktionsverfahren
- kommt jedem beliebigen Punkt einer quadratischen Fläche beliebig nahe

Einsatz:

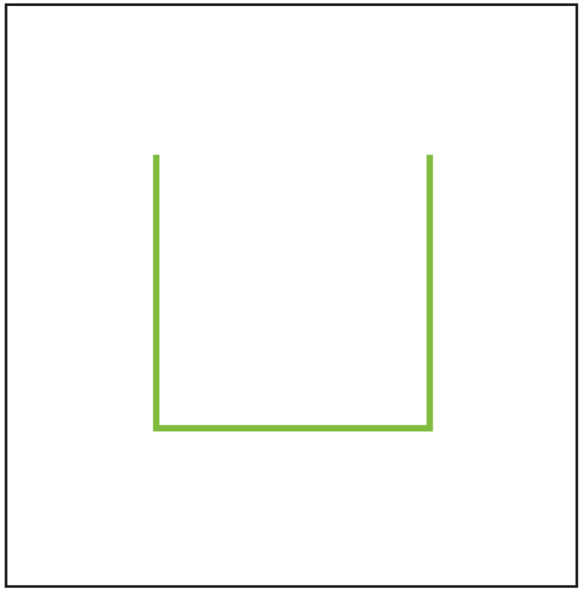
- Bei Parallelrechnerarchitekturen zur Berechnung der Prozessorlast

Größe / Länge:

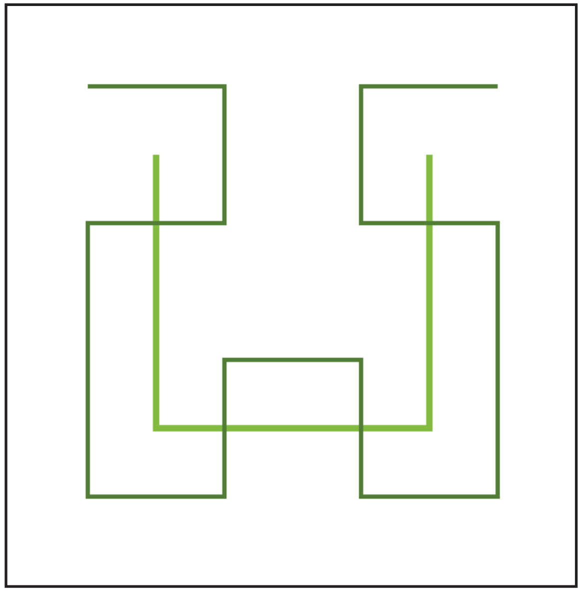
- Die euklidische Länge ist: $2^n - \frac{1}{2^n}$. Sie wächst also exponentiell in n.

Space Filling Curves
Hilbert-Curve

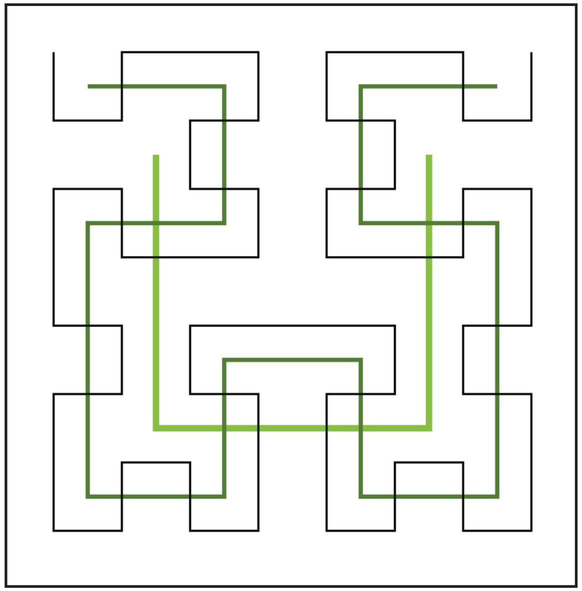
Beispiel:



1. Ordnung



1.,2. Ordnung

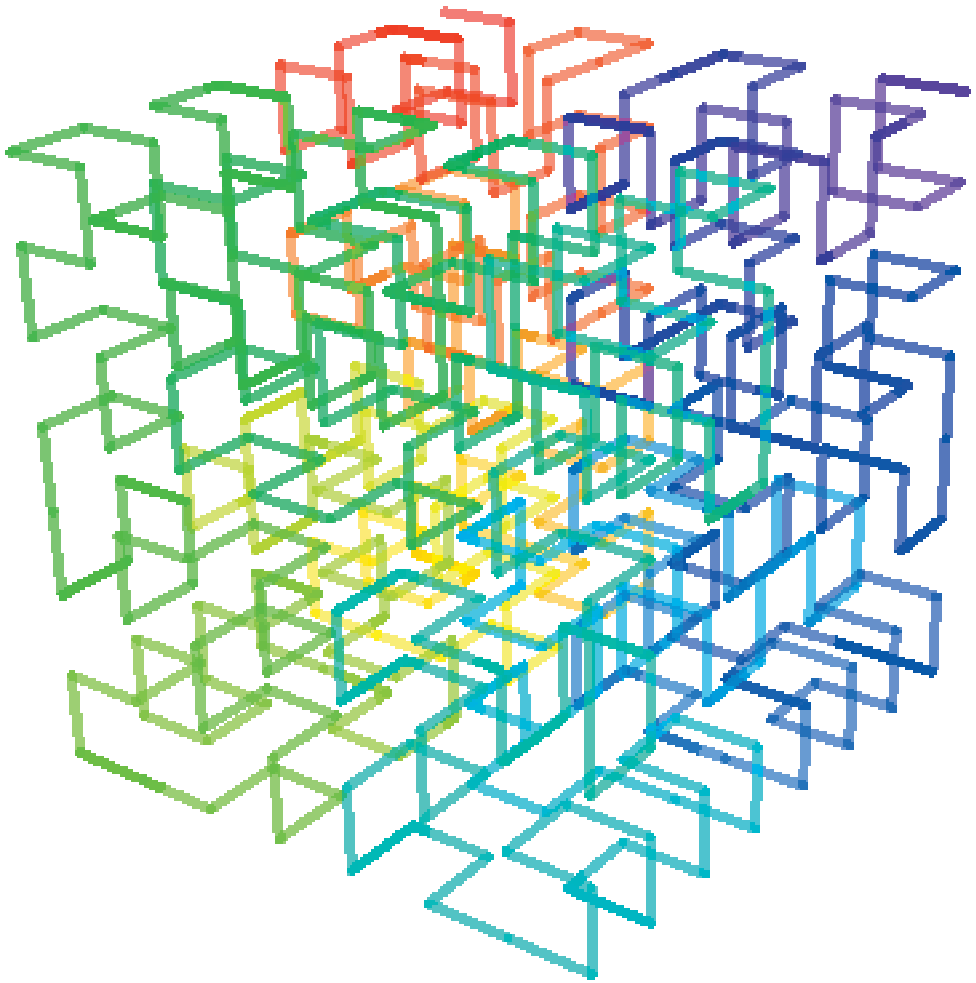


1.,2.,3. Ordnung

Space Filling Curves

Hilbert-Curve

Beispiel 3-D:



Anmerkungen:

- Java-Applet-Code / Python-Code
- & Lindenmayer-Rewrite-System (BNF-ähnlich)

unter: http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert_curve

Space Filling Curves

Peano-Curve

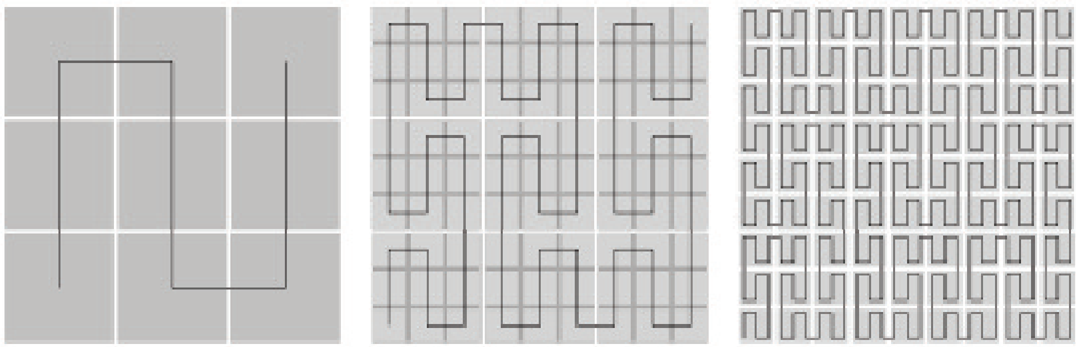
- Erste Space-Filling-Curve
  Daher werden 2-d SFC auch als Peano-Curves bezeichnet
- Giuseppe Peano, italienischer Mathematiker 1858-1932
- vorangig bekannt durch Peano-Axiome (natürliche Zahlen / Induktion)

Space Filling Curves
Peano-Curve

Aufbau der Peano-Curve

- Unterteile vorh. Fläche in 9 gleichgroße Quadrate
- Durchlaufe Quadrate in S-Kurve
- Fahre rekursiv fort mit ggf. Anpassung und Verbindung der Kurve

Beispiel:

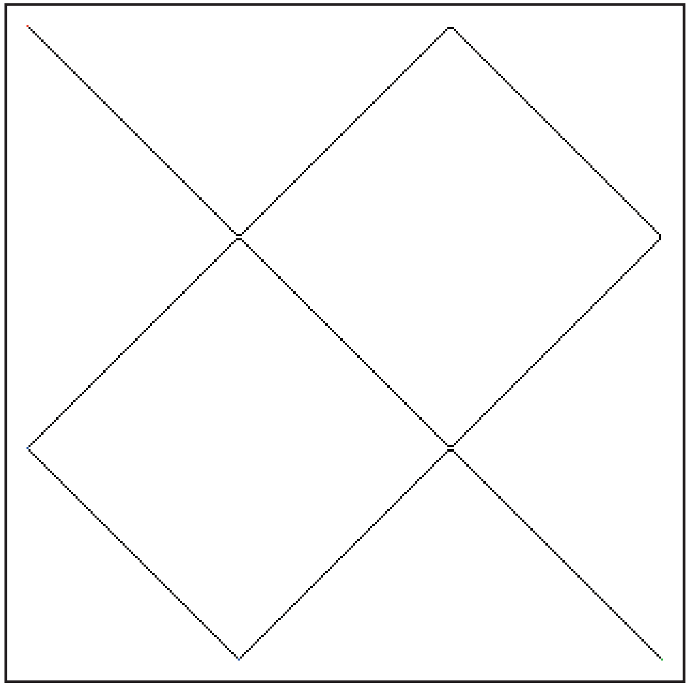


Space Filling Curves

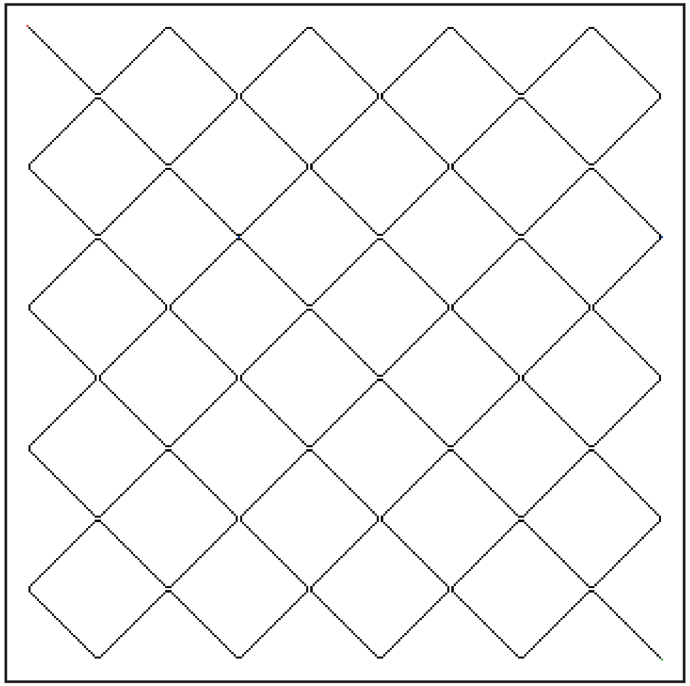
Peano-Curve

Alternative Peano-Curve:

- Struktur entspricht der Cantor-Diagonalisierung



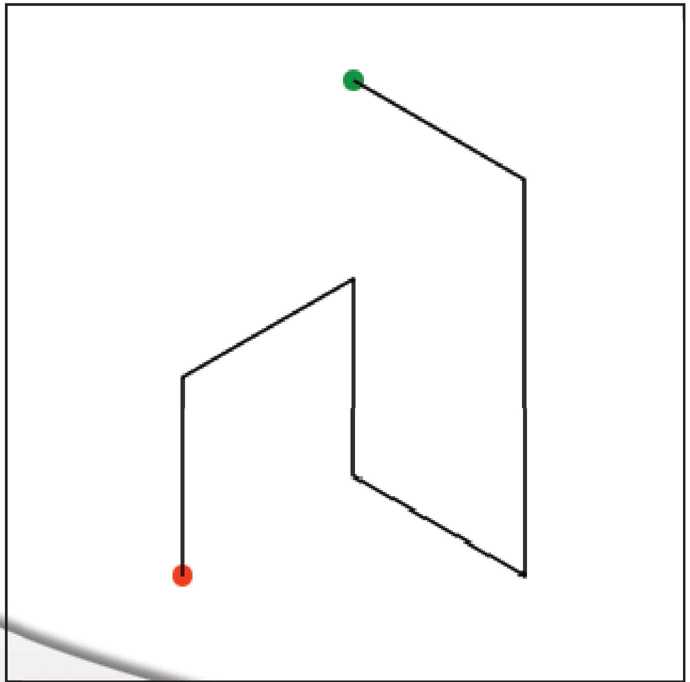
1. Ordnung



2. Ordnung

Gosper-Curve

- Bill Gosper, alias R. William Gosper, Jr, Mathematiker und Programmierer
- Auch bekannt durch Gleiterkanone aus: Conways Spiel des Lebens
- Gosper-Curve durch Ersetzung aufgebaut



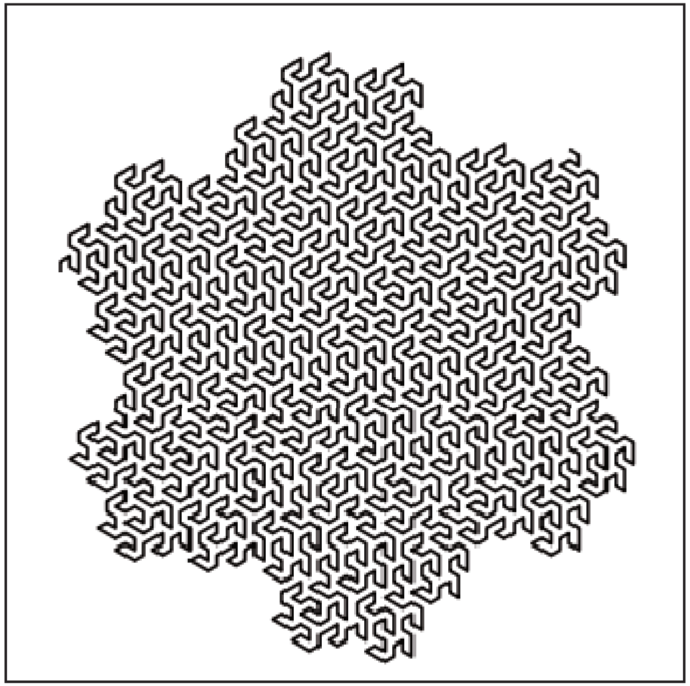
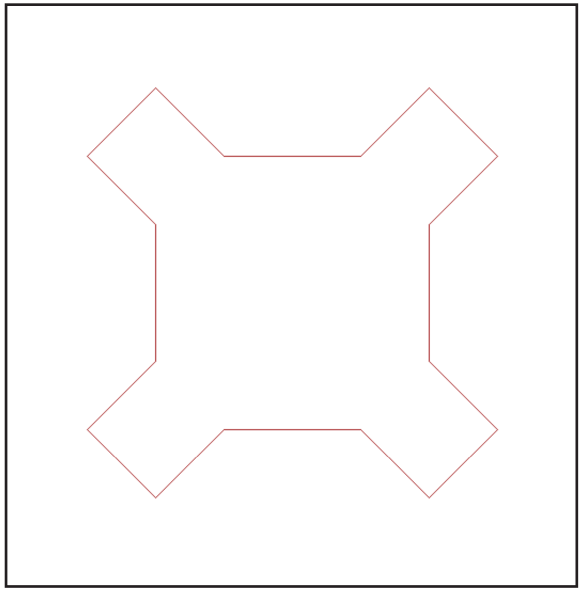


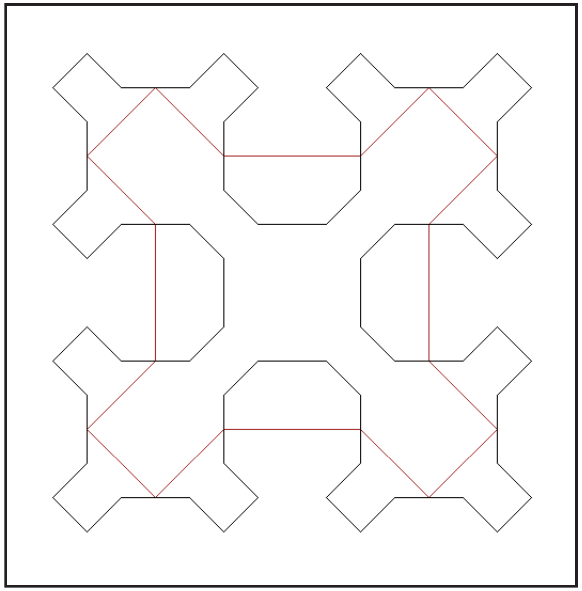
Bild links:
1. Ordnung

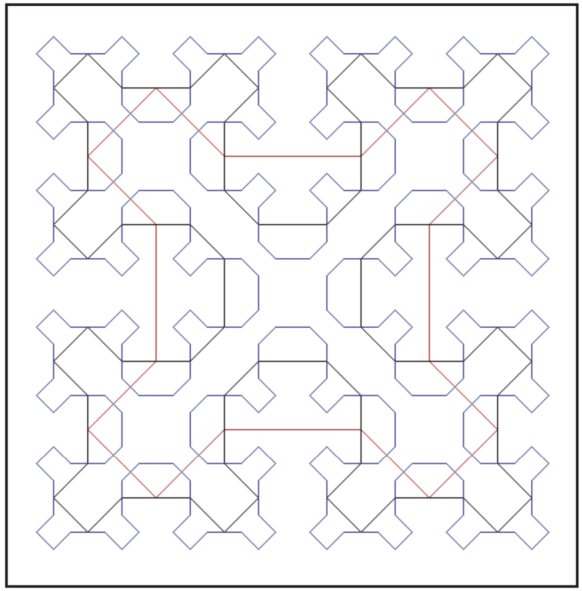
Bild rechts:
4. Ordnung

Sierpiński-Curve

- 1912, Wacław Sierpiński, polnischer Mathematiker
- Gute Symmetrieeigenschaften
  daher häufige Verwendung bei TSP-Approximationsalgorithmen (»Routenplaner)

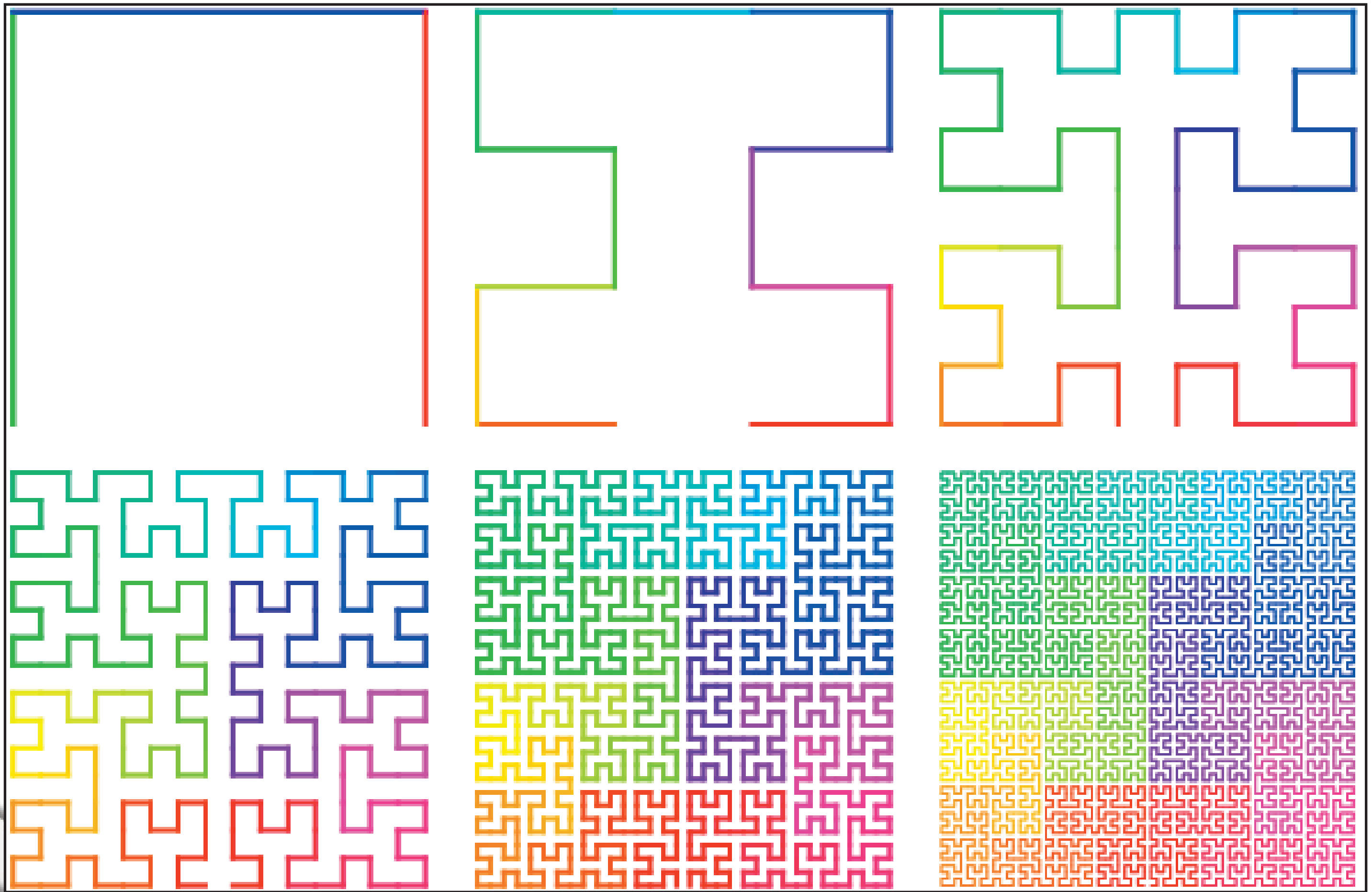

1. Ordnung


2. Ordnung


3. Ordnung

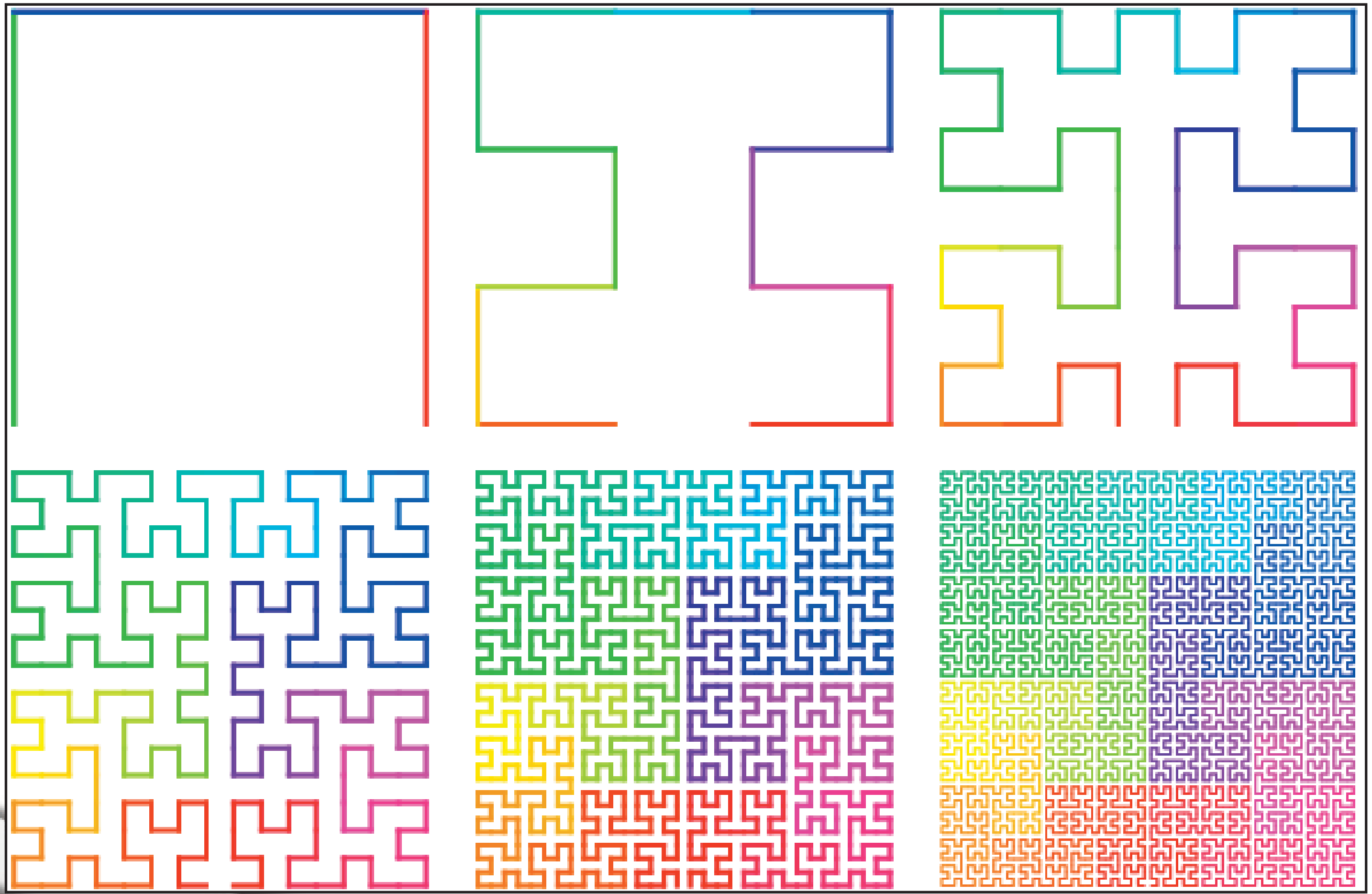
Moore-Curve

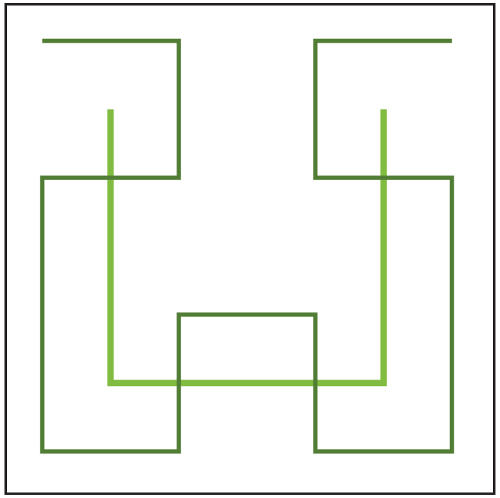
- Eliakim Hastings Moore, 1862-1932, amerikanischer Mathematiker



Moore-Curve

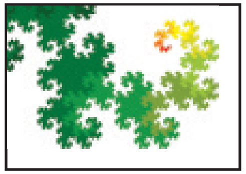
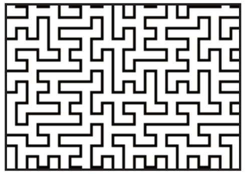
- Eliakim Hastings Moore, 1862-1932, amerikanischer Mathematiker





Hilbert-Curve
zum Vergleich

Weitere Curves und Fractals für Interessierte:

- Dragon-Curve 
- E-Curve 
- ...

Kompletter Overview mit Grafiken unter:

http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension

Quellen:

- Skript Mathe2 für Informatiker, Skutella, SS06 http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsv/lehre/ss2006/mafii/Skript120706.pdf
- Wikipedia Deutsch http://de.wikipedia.org/wiki/FASS-Kurve
  und weiterführende Links im Inhaltsbereich
- Wikipedia Englisch http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension
  und weiterführende Links im Inhaltsbereich
- Ähnlichkeitssuche in Multimediadatenbanken:
  Retrieval, Suchalgorithmen und Anfragebehandlung
  I.Schmidt, Oldenbourg Verlag, 2005
- Mehr zur TSP-Heuristik mit Space-Filling-Curves bei IEEE, Artikel 00469661
  http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=00469661