Kap. 3 Sortieren

3.1.5 HeapSort ff

3.1.6 Priority Queues

Vorlesung am Do 7.5.
entfällt wegen FVV
um 14 Uhr

Professor Dr. Petra Mutzel

Lehrstuhl für Algorithm Engineering, LS11

Fakultät für Informatik, TU Dortmund

7. VO DAP2 SS 2009 5. Mai 2009

Termine für Übungstests

- **1. Übungstest:**
- Di **19. Mai**, in der Vorlesung im AudiMax, Beginn: ab 12:15 Uhr, ab 12 Uhr anwesend sein wegen Sitzordnung

- **2. Übungstest:**
- Di **16. Juni**, in der VO im AudiMax, Beginn: ab 12:15 Uhr, ab 12 Uhr anwesend sein wegen Sitzordnung

Motivation

„Warum soll ich hier bleiben?"

Heap als Datenstruktur

„Warum soll mich das interessieren?"

Dies wird später immer wieder benötigt...

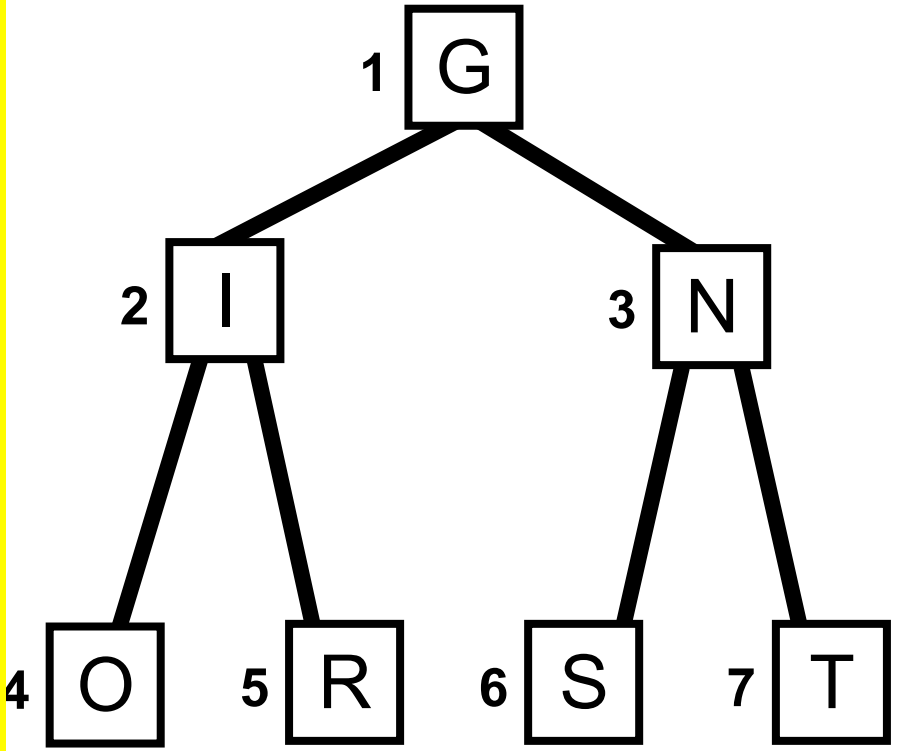
Überblick

- Wiederholung HeapSort
- Analyse HeapSort
- ADT Priority Queue

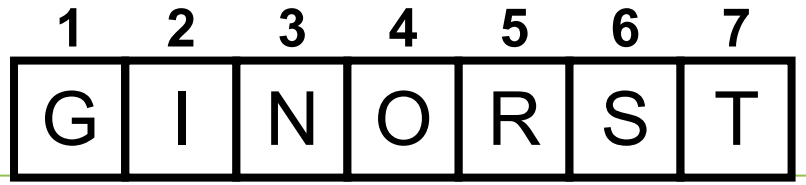
Wdhlg: Animation von Heap-Sort

Analyse SiftDown

```
procedure SIFTDOWN (i, m) {
    while Knoten i hat Kinder ≤ m
    {
       j := Kind ≤ m mit größerem
    Wert
       if A[i] < A[j] then {
           vertausche A[i] und A[j]
           i := j
       } else return
    } }
```



O(Baumtiefe) = O(log n)



Analyse CreateHeap

```
procedure CREATEHEAP () {
    for i := ⌊n/2⌋ … 1 {
        SIFTDOWN (i, n)
} }
```

Schleife:

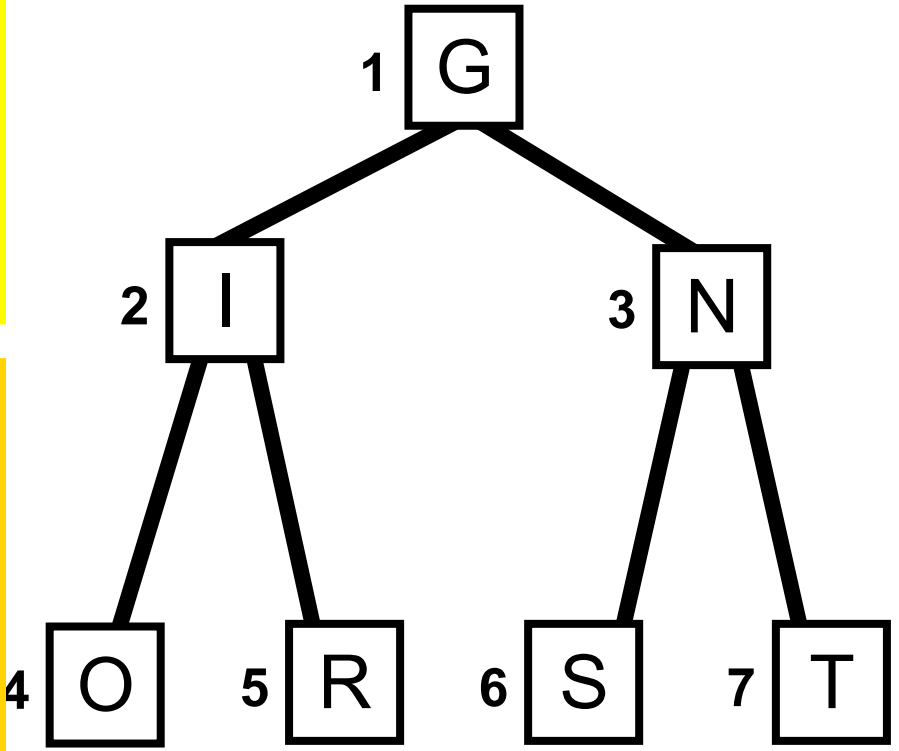
O(n) mal

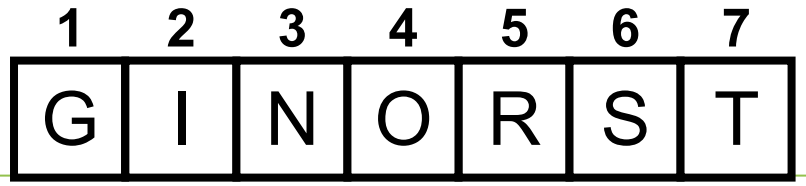
Pro Schleife:

O(log n)

→ O(n log n)

Es gilt sogar: O(n) (jetzt Beweis)





Für Beweis: Wdhlg. Höhe des Baums

# Knoten BIS Ebene	# Knoten PRO Ebene	
1	1	Ebene 1
3	2	Ebene 2
7	4	Ebene 3
15	8	Ebene 4
2^k-1	2^{k-1}	Ebene k

Tiefe/Höhe eines Baums = Anzahl der Ebenen - 1

Gegebene Höhe *h*:

$n_{max} = 2^{h+1}-1$

$n_{min} = 2^h$

Maximale Höhe bei n Elementen?

$n = 2^h \rightarrow h_{max} = \log_2 n$

→Höhe des Heaps: $\lfloor O(\log n) \rfloor$

Analyse CreateHeap

Lemma: CREATEHEAP() läuft in Zeit $O(n)$ für n Elemente.

Beweis: Sei k die Anzahl der Ebenen des Binärbaums, d.h. $2^{k-1} \leq n \leq 2^k-1$.

- Auf Ebene j sind $\leq 2^{j-1}$ Schlüssel
- Anzahl Vergleiche für **SIFTDOWN()** von Ebene j ist im worst case proportional zu $k-j$
- Insgesamt:

$$T(n) = \sum_{j=1}^{k-1} 2^{j-1}(k-j) = \sum_{j=1}^{k-1} j2^{k-j-1} = 2^{k-1}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{j}{2^j} \leq 2^{k-1}2 \leq 2n$$

(denn $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{2^j} = 2$)

Analyse HeapSort

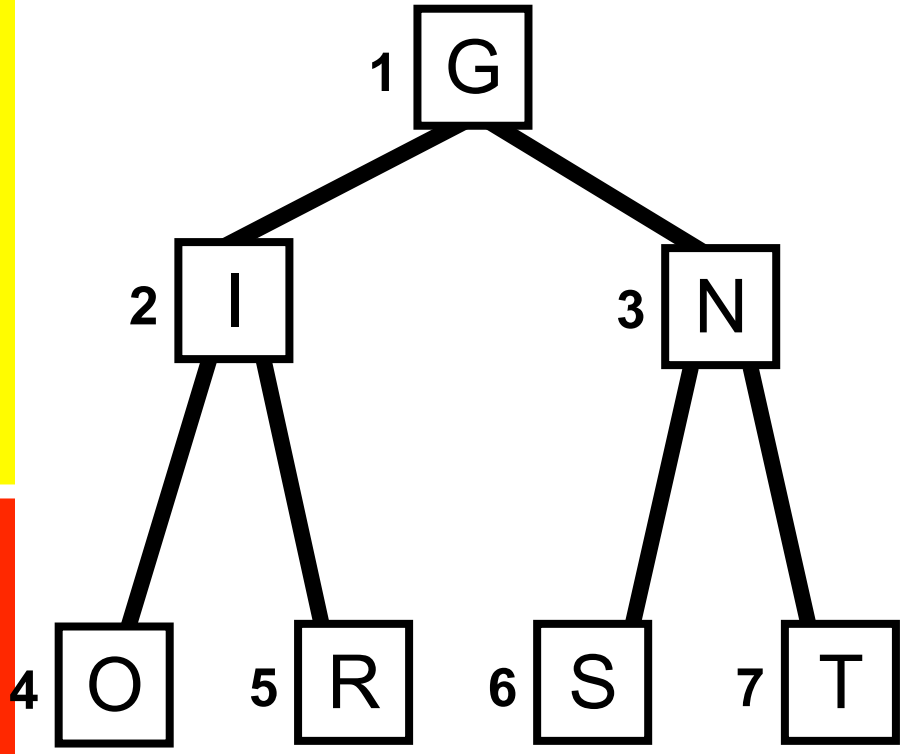
```
procedure HEAPSORT () {
    CREATEHEAP()
    for k :=  n … 2 {
        vertausche A[1] und A[k]
        SIFTDOWN (1, k-1)
} }
```

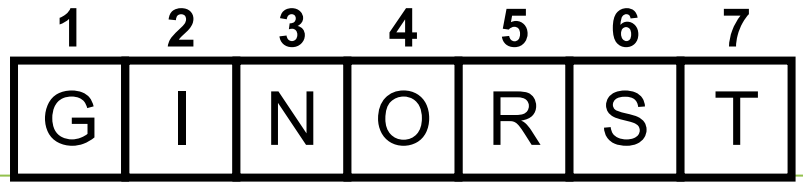
CreateHeap: O(n)

Schleife: O(n) mal

Pro Schleife: O(log n)

Insgesamt: → O(n log n)





Best Case Analyse

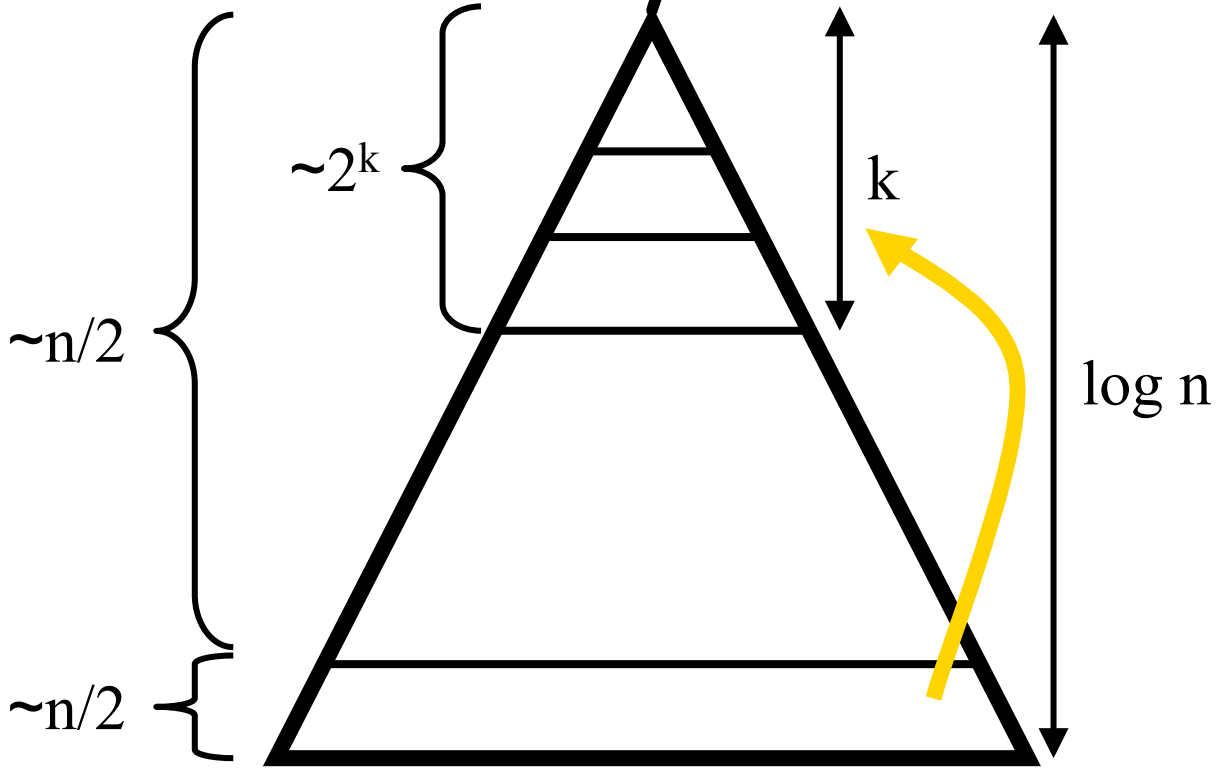
Intuition

Annahme: linear? **SIFTDOWN()** nur konstant (k) viele Schritte?

- Bei Beendigung von **SIFTDOWN()** muss $A[i] \geq A[j]$
- $A[i]$ wurde aber gerade erst von unten getauscht
- um "oben" auf dem Heap zu bleiben muss es groß sein
- Kann es sein, dass alle großen Elemente oben auf dem Heap bleiben können?
- Nein, denn "oben" ist zu wenig Platz (die meisten Elemente sind unten)

Best Case Analyse

$\Omega(n \log n)$



Annahme: linear?

→ **SIFTDOWN()** nur konstant (k) viele Schritte

→ zu wenig Platz für alle Blätter!

Analyse HeapSort

- **Anzahl der Schlüsselvergleiche:**

  $C_{worst}(n)=C_{best}(n)=C_{avg}(n)=\Theta(n \log n)$

- **Anzahl der Datenbewegungen:**

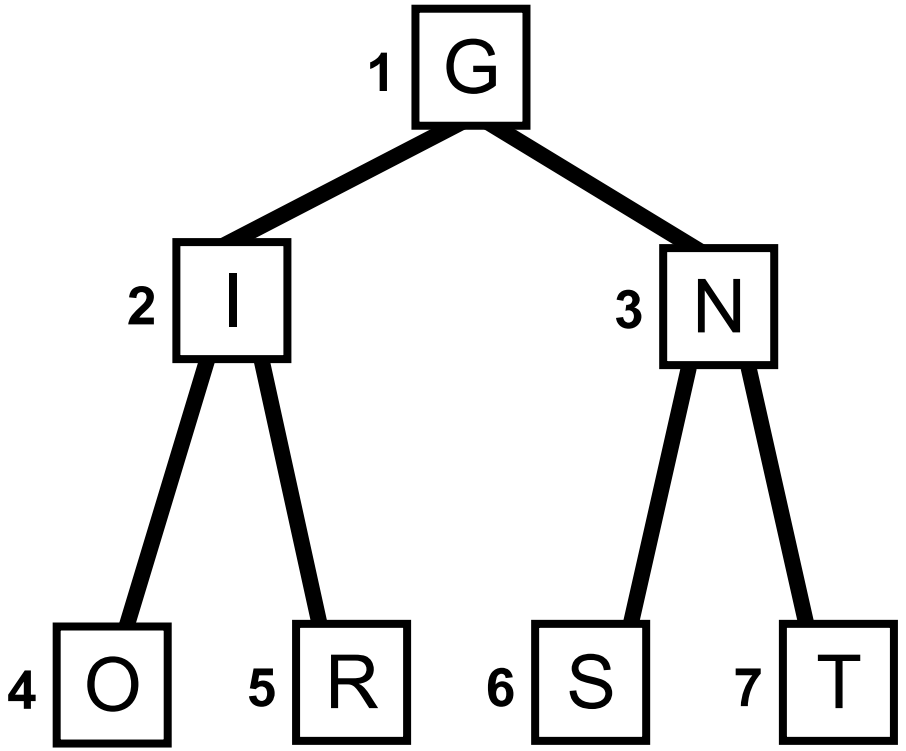
  $C_{worst}(n)=C_{best}(n)=C_{avg}(n)=\Theta(n \log n)$

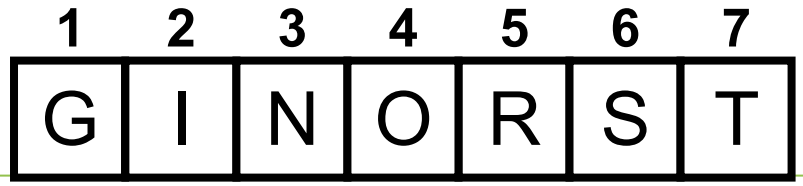
Eigenschaften

in-situ?

stabil?

adaptiv?





3.1.6 Der ADT Priority Queue

„Prioritätswarteschlange, (PQ)“

- **Wertebereich:** Multi-Menge von Paaren (p,v) aus PxV, wobei P eine linear geordnete Menge von Prioritäten und V eine beliebige Menge von Werten $(value)$ bezeichnet.

Operationen des ADT Priority Queue

- **Allgemeine Operationen:**
  - Einfügen eines Elements (INSERT)
  - Löschen eines Elements an Stelle pos (DELETE)
  - ISEMPTY
  - Gib Priorität von Element an pos zurück (PRIORITY)
  - Minimum Ausgabe (ACCESSMIN)
  - Minimum Extrahieren (d.h. Minimum ausgeben und dann entfernen (EXTRACTMIN)
  - DECREASEPRIORITY: Verringere Priorität eines Elements an Position pos

Realisierung des ADT Priority Queue

- **mittels eines Heaps (MinHeap) in Array**

- **Operationen (HIER speziell):**
  - Initialisieren
  - Minimum Ausgabe (AccessMin): Wurzel
  - Minimum Entfernen (DeleteMin): kopiere letztes Element an Wurzel, SIFTDOWN(1)
  - Einfügen eines Elements Insert(p,v): füge hinten ein, Aufruf von SIFTUP(n)
  - DecreasePriority(pos,p): ändere prio, SIFTUP(pos)

Repräsentation einer Min-Heap PQ

HeapElement

- prioType priority // Priorität des Elements
- valueType value //Wert (value)
- int index //Index des Elements im Feld

Repräsentation einer MinHeap PQ

- int heapSize
- HeapElement A[1..n]

Initialisierung: heapSize=0

Repräsentation einer Min-Heap PQ

```
Function AccessMin(): HeapElement
return A[1]
```

```
Procedure DeleteMin()
  A[heapSize.index]=1
  kopiere A[heapSize] nach A[1]
  heapSize = heapSize-1
  SIFTDOWN(1,heapSize)
```

```
Procedure DecreasePriority(pos,p)
  pos.priority = p  //prüfe vorher, ob p wirklich kleiner
  SIFTUP(pos.index)
```

INSERT bei Min-Heap PQ

```
Function INSERT(p,v): HeapElement
  var HeapElement x
  heapSize = heapSize+1
  x = new HeapElement
  x.priority = p
  x.value = v
  x.index = heapSize
  A[heapSize] = x
  SIFTUP(heapSize)
  return x
```

DELETE bei Min-Heap PQ

```
Function DELETE(pos)
  A[heapSize].index = pos.index
  Tausche A[heapSize] und A[pos.index]
 heapSize = heapSize-1
  i=pos.index
 SIFTUP[i]          //es ist entweder NUR SIFTUP
 SIFTDOWN[i]    //oder SIFTDOWN notwendig
 delete pos
```

SIFTDOWN bei MinHeap PQ

```
Procedure SIFTDOWN (i, m) {
   while Knoten i hat Kinder ≤ m {
      j := Kind ≤ m mit kleinerem Wert
      if A[i].priority > A[j].priority then {
         A[j].index = i   // weiß immer, an welcher Stelle
         A[i].index = j  // Element im Heap ist
          vertausche A[i] und A[j]
          i := j
      } else return
   } }
```

SIFTUP bei MinHeap PQ

```
Procedure SIFTUP (i) {
    var int parent
    parent = i/2    //abgerundet
    while parent > 0 {
    if A[parent].priority > A[i].priority then {
            A[parent].index = i
            A[i].index = parent
             vertausche A[i] und A[parent]
             i = parent
             parent = i/2
       } else return
    } }
```

Analyse des ADT Priority Queue

- **mittels eines Heaps (MinHeap) in Array**

- **Operationen:**
  - Initialisieren: O(1)
  - Minimum Suchen (AccessMin): O(1)
  - Minimum Entfernen (DeleteMin): O(log n)
  - Einfügen eines Elements Insert(p,v): O(log n)
  - DecreasePriority(pos,p): O(log n)
  - weitere Op: Delete(pos): s. Skript

Ende Heap-Sort

Bedeutung der asymptotischen Laufzeit

	Algorithmus	Implementierung	Geschwindigkeit: ops/sec
schneller Computer	InsertionSort	$2n^2$	10000 Mio
langsamer Computer	MergeSort	$50n \log n$	100 Mio

- Sortieren von 1 Mio. Zahlen:
  - InsertSort: $2(10^6)^2 \text{ops}/10^{10} \text{ops/sec} = 200 \text{ sec}$
  - MergeSort: $50\ 10^6 \log 10^6 \text{ops} / 10^8 \text{ops/sec} \approx 10 \text{ sec}$
  - gleiche Rechner: **200 Sekunden vs. 0,1 Sekunde**

- **Wie Computer sind auch Algorithmen Technologie!**

	Algorithmus	Implementierung	Geschwindigkeit: ops/sec
schneller Computer	InsertionSort	$2n^2$	10000 Mio
langsamer Computer	MergeSort	$50n \log n$	100 Mio

- Sortieren von 10 Mio. Zahlen:
  - InsertSort: $2(10^7)^2 \text{ops}/10^{10} \text{ops/sec} = 20000 \text{ sec} \approx 5{,}5 \text{ Std.}$
  - MergeSort: $50\ 10^7 \log 10^7 \text{ops} / 10^7 \text{ops/sec} \approx 120 \text{ sec}$
  - gleiche Rechner: **5,5 Stunden vs. 1,2 Sekunden**