Kap. 3: Sortieren (2)

Professor Dr. Petra Mutzel

Lehrstuhl für Algorithm Engineering, LS11

Fakultät für Informatik, TU Dortmund

5. VO DAP2 SS 2009 28. April 2009

Motivation

„Warum soll ich hier bleiben?"

Wir analysieren Merge-Sort

„Was ist daran denn besonders?"

Wir lösen eine Rekursionsgleichung

Überblick

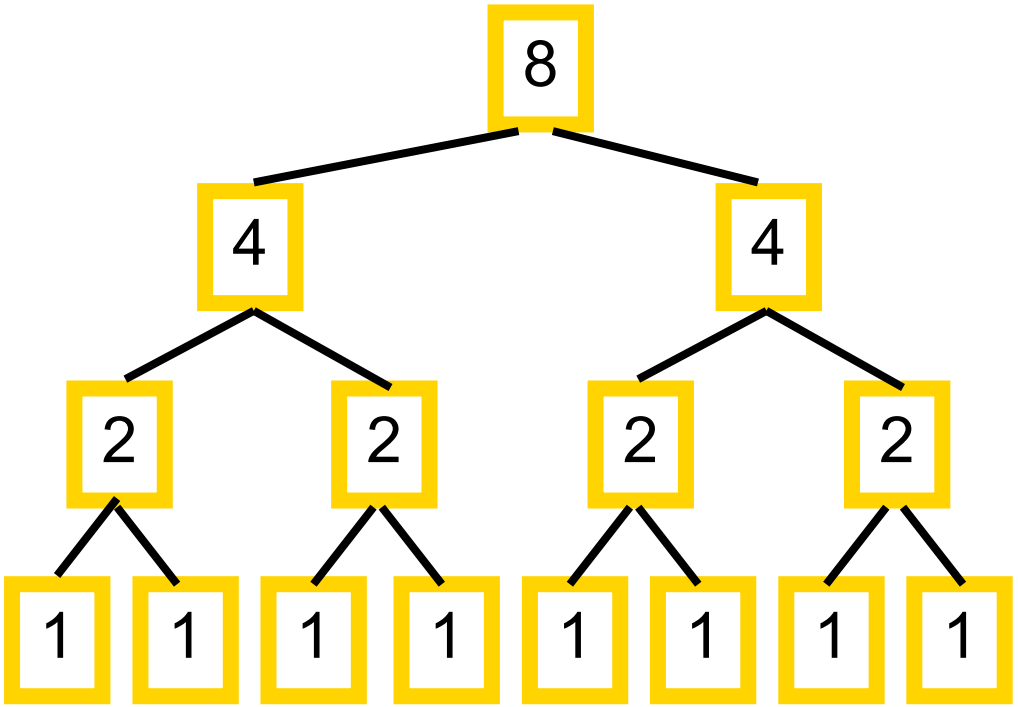
- Analyse von Merge-Sort
- Eigenschaften von Merge-Sort

- Quick-Sort
- Analyse von Quick-Sort

Herleitung der Laufzeitfunktion (Abschätzung)

Sei $n=2^k$ für ein beliebiges k

hier: $n=8, k=3$:



Anzahl der Instanzen	Zeit pro Instanz (ungefähr)	Gesamtzeit
$1 = 2^0$	$8 = 2^3$	$8 = 2^3$
$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$
$4 = 2^2$	$2 = 2^1$	$8 = 2^3$
$8 = 2^3$	$1 = 2^0$	$8 = 2^3$

Aufwand in jeder Stufe ca. $n=2^k$.

Es gibt $k+1=\log n + 1$ solcher Stufen

Gesamtaufwand:

$T(n) = n\,(1 + \log n) =$

$= \Theta(n \log n)$

Worst-Case Analyse von MergeSort

jetzt formal

- **Teile:** $\Theta(c)$, c konstant
- **Erobere**: Lösen zweier Teilprobleme der Größe $\lceil n/2 \rceil$ bzw. $\lfloor n/2 \rfloor$: $T(\lceil n/2 \rceil)+T(\lfloor n/2 \rfloor)$.
- **Kombiniere:** Merge() kostet $\Theta(n)$

Rekursionsgleichung der Laufzeitfunktion:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1), & \text{für } n = 1 \\ T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \Theta(n), & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

Lösung: $T(n)=\Theta(n \log n)$

Worst-Case MergeSort: Beweis

- Wir zeigen: $T(n)=O(n \log n)$
- Aus der Rekursionsgleichung folgt: Es existiert ein $a>0$, so dass gilt

$$T(n) \leq \begin{cases} a, & \text{für } n = 1 \\ T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + an, & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

Wir zeigen mit Induktion, dass mit $c=3a$ für alle $n \geq 3$ gilt: $T(n) \leq cn \log(n-1)$

Induktionsanfang:

- n=3:

$$\begin{aligned} T(3) &\leq T(1) + T(2) + 3a \\ &\leq T(1) + 2T(1) + 2a + 3a \\ &\leq 3T(1) + 5a \\ &\leq 8a = \frac{8}{3}c \\ &\leq 3c = c3\log(3-1) \end{aligned}$$

- n=4:

$$\begin{aligned} T(4) &\leq T(2) + T(2) + 4a \\ &\leq 4T(1) + 8a \\ &\leq 12a \\ &= 4c \leq c4\log(4-1) \end{aligned}$$

Induktionsanfang:

- n=5:

$$
\begin{aligned}
T(5) &\leq T(2) + T(3) + 5a \\
&\leq 2T(1) + 2a + T(2) + T(1) + 3a + 5a \\
&\leq 3T(1) + 10a + 2T(1) + 2a \\
&= 5T(1) + 12a \\
&\leq 17a = \frac{17}{3}c \\
&\leq 10c = c5\log(5-1)
\end{aligned}
$$

Induktionsschluss

- Ann: gilt für alle Instanzen kleiner als n:
- $n \geq 6$:

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq T\left(\left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil\right) + T\left(\left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor\right) + a\,n \\
&\leq c\left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil \log\left(\left\lceil \tfrac{n}{2} \right\rceil - 1\right) + c\left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor \log\left(\left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor - 1\right) + a\,n \\
&\leq c\tfrac{n+1}{2} \log\left(\tfrac{n+1}{2} - 1\right) + c\tfrac{n}{2} \log\left(\tfrac{n}{2} - 1\right) + a\,n \\
&\leq c\tfrac{n+1}{2} \log\left(\tfrac{n-1}{2}\right) + c\tfrac{n}{2} \log\left(\tfrac{n-2}{2}\right) + a\,n \\
&= \tfrac{1}{2}c(n+1)\log(n-1) + \tfrac{1}{2}c\,n\log(n-2) - c\tfrac{n+1}{2} - c\tfrac{n}{2} + a\,n
\end{aligned}
$$

$$\log \frac{Z}{N} = \log Z - \log N$$

Induktionsschluss ff

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{2}c(n+1)\log(n-1) + \tfrac{1}{2}c\,n\log(n-2) - c\tfrac{n+1}{2} - c\tfrac{n}{2} + a\,n \\
&\leq \tfrac{1}{2}c\,n\log(n-1) + \tfrac{1}{2}c\log(n-1) + \tfrac{1}{2}c\,n\log(n-1) - c\,n \\
&\quad -\tfrac{c}{2} + a\,n \\
&= c\,n\log(n-1) + \tfrac{c}{2}\log(n-1) - c\,n - \tfrac{c}{2} + \tfrac{c}{3}n \\
&\leq c\,n\log(n-1) - \tfrac{c}{2}(2n+1-\log(n-1)) + \tfrac{c}{2}n \\
&\leq c\,n\log(n-1) - \tfrac{c}{2}n + \tfrac{c}{2}n \\
&= c\,n\log(n-1)
\end{aligned}
$$

- zu zeigen: $T(n)=\Omega(n \log n)$ $\rightarrow$ zuhause

Worst-Case Analyse von MergeSort

- **Anzahl der Schlüsselvergleiche (Z. 4):**

  $C_{best}(n)=C_{avg}(n)=C_{worst}(n)=\Theta(n \log n)$

- **Anzahl der Datenbewegungen (Z. 6,8,10):**

  $M_{best}(n)=M_{avg}(n)=M_{worst}(n)=\Theta(n \log n)$

Eigenschaften von MergeSort

- **Eigenschaften:**
  - in situ ? 
  - adaptiv ? 
  - stabil ? 

- **Besonderheit:**
  - MergeSort verarbeitet Daten sequentiell
  - deshalb sind verkettete Listen gut geeignet
  - gutes externes Verfahren

3.1.4 Quick-Sort

Idee folgt dem „Divide and Conquer“-Prinzip:

- **Teile:** Wähle Pivotelement k von A, teile A ohne k in Teilfolgen A_1 und A_2 mit
  - A_1 enthält nur Elemente $\leq k$
  - A_2 enthält nur Elemente $\geq k$
- **Erobere:** QuickSort(A_1); QuickSort(A_2); danach sind A_1 und A_2 sortiert
- **Kombiniere** Bilde A durch Hintereinanderfügen in der Reihenfolge A_1,k,A_2

1960 von C.A.R. Hoare entwickelt

QuickSort(ref A,l,r)

```
(1) procedure QuickSort(ref A,l,r)
(2)   var Index p
(3)   if l < r then {
(4)     p = Partition(A,l,r)
(5)     QuickSort(A,l,p-1)
(6)     QuickSort(A,p+1,r)
(7)   }
```

Aufruf: QuickSort(A,1,n)

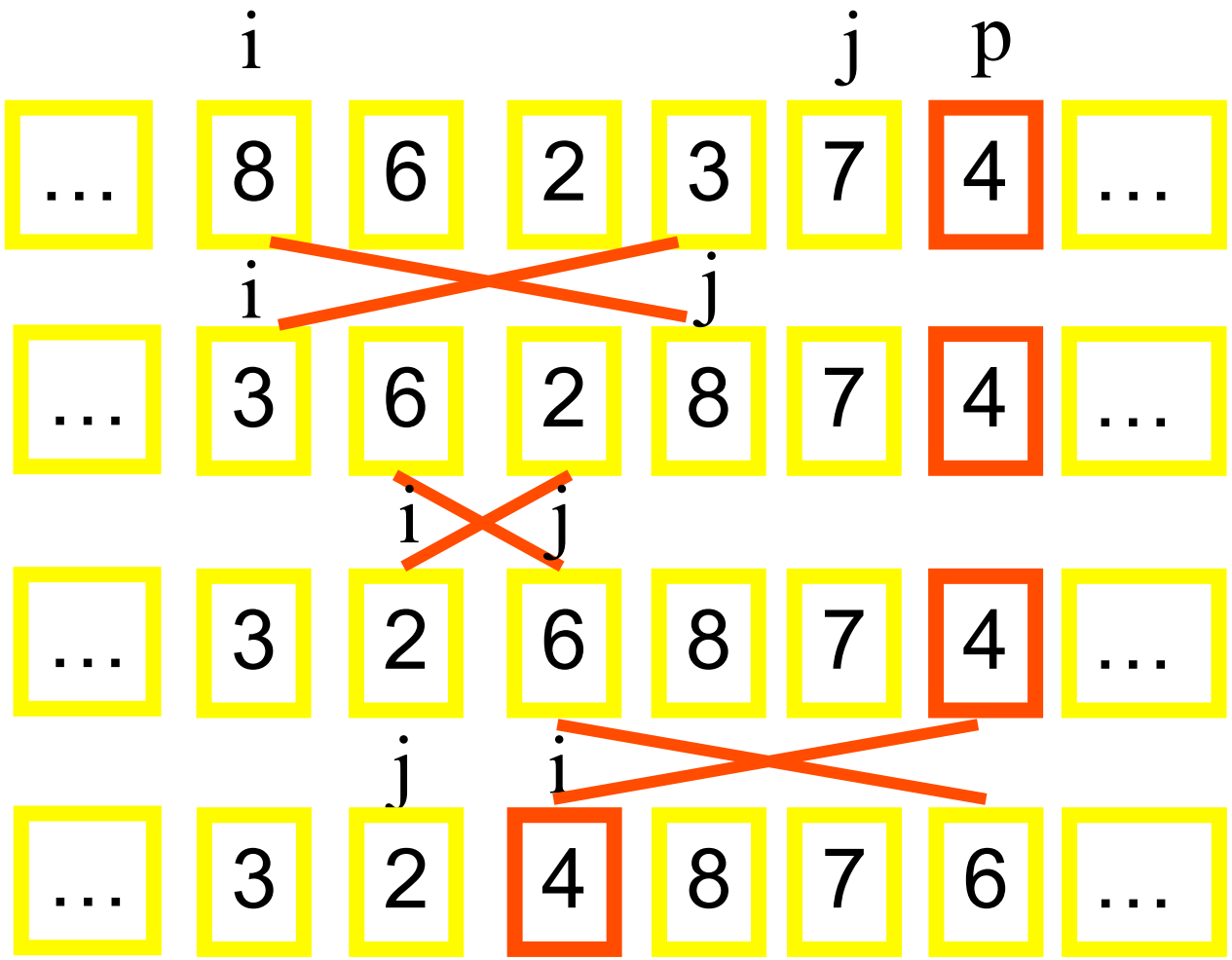
Partition(ref A,*l*,r)

```
(1) function Partition(ref A,l,r)
(2)  var Indizes i,j; Schlüsselwert x
(3)   x:=A[r].key
(4)   i:=l-1; j:=r
(5)   repeat
(6)      repeat i:=i+1 until A[i].key ≥ x
(7)      repeat j:=j-1 until j < l or A[j].key < x
(8)      if i < j then vertausche A[i] und A[j]
(9)   until i ≥ j
(10) vertausche A[i] und A[r]
(11) return i
```

Korrektheit

- QuickSort ist offensichtlich korrekt, wenn er terminiert.
- **Terminierung von Partition:**
  - **Zeile 6:** klar wegen Wahl des Pivotelements ganz rechts
  - **Zeile 7:** bricht spätestens ab, wenn der linke Rand überlaufen wird.

Ablauf von QuickSort

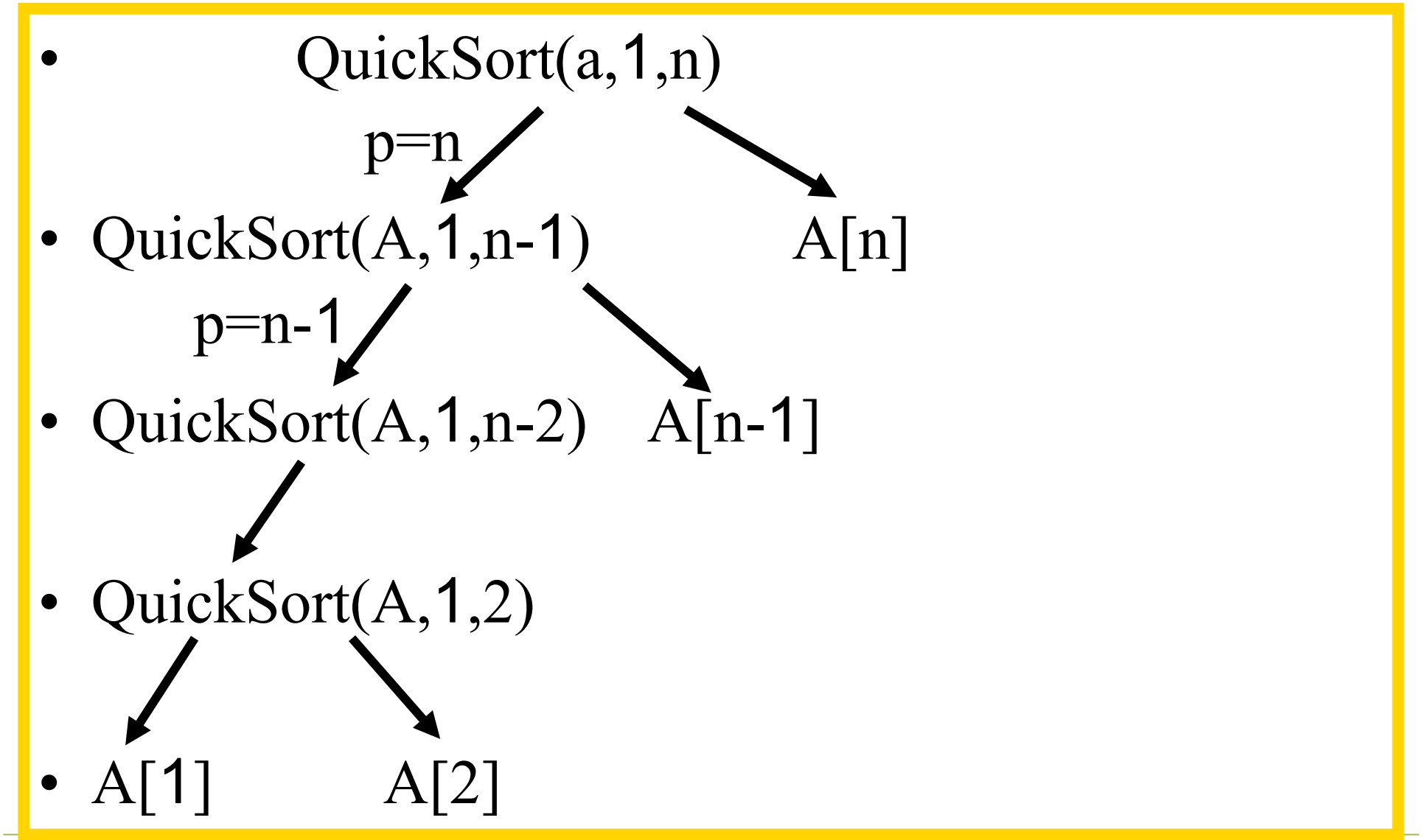


Analyse von QuickSort

- **Teile:** Partition() kostet $\Theta(n)$
- **Erobere**: Lösen zweier Teilprobleme der Größe $|A_1|$ bzw. $|A_2|$
- **Kombiniere:** konstant

Worst Case Fall?

Aufrufbaum für sortierte Folge



Analyse von QuickSort: Worst-Case

Worst-Case: z.B. falls A bereits sortiert ist:

- Aufrufbaum hat lineare Tiefe
- Partitionierung: n Vergleiche über Index i und 1 Vergleich über Index j beim ersten Durchgang, n-1 Vergleiche über i beim zweiten Durchgang,...

$$C_{worst}(n) = \sum_{k=2}^{n} (k+1) = \sum_{k=3}^{n+1} k =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3 = \Theta(n^2)$$

- **Anzahl der Datenbewegungen:**

  In diesem Fall: $M(n)=\Theta(n)$ und im schlechtesten Fall: $M_{worst}(n)=\Theta(n \log n)$ (ohne Beweis)

Analyse von QuickSort: Best-Case

Best-Case: die beiden Folgen A_1 und A_2 haben immer ungefähr gleiche Länge

- Aufrufbaum hat Tiefe $\Theta(\log n)$ (s. MergeSort)
- Partitionierung: n Vergleiche per Stufe

$$C_{best}(n) = \Theta(n \log n)$$

- **Anzahl der Datenbewegungen:**

  In diesem Fall: $M(n)=\Theta(n \log n)$ und im besten Fall: $M_{best}(n)=\Theta(n)$

ENDE 28.4.09