Kap. 3: Sortieren

Professor Dr. Petra Mutzel

Lehrstuhl für Algorithm Engineering, LS11

Fakultät für Informatik, TU Dortmund

4. VO DAP2 SS 2009 23. April 2009

Überblick

- Einführung in das Sortierproblem

- Insertion-Sort
- Selection-Sort
- Merge-Sort

Motivation

„Warum soll ich hier bleiben?"

Sortierverfahren sind WICHTIG!!!

„Ich kann doch schon sortieren."

ABER ES GEHT SCHNELLER!

„Unser" Sortierproblem

Eingabe: Folge von Datensätzen $<s_1,s_2,\ldots,s_n>$ mit Schlüsseln $k_1,k_2,\ldots,k_n$, auf denen eine Ordnungsrelation „$\leq$" definiert ist.

Ausgabe: Permutation $\pi : \{1,2,\ldots,n\} \xrightarrow{1:1} \{1,2,\ldots,n\}$, so dass die Umordnung der Datensätze gemäß π die Schlüssel in aufsteigende Reihenfolge bringt: $k_{\pi(1)} \leq k_{\pi(2)} \leq \ldots \leq k_{\pi(n)}$

Speicherung in Feld: $A[1],\ldots,A[n]$

Ansprechbar: Schlüssel: $A[i].key$

Informationsfeld: $A[i].info$

Laufzeitmessung

- Anzahl der durchgeführten Schlüsselvergleiche („Comparisons") für Best-Case, Worst-Case und Average-Case:
- $C_{best}(n)$, $C_{worst}(n)$, $C_{avg}(n)$

- Anzahl der durchgeführten Bewegungen („Movements", Kopieren) von Datensätzen für Best-Case, Worst-Case und Average-Case:
- $M_{best}(n)$, $M_{worst}(n)$, $M_{avg}(n)$

Eigenschaften von Sortierverfahren

- **Intern/Extern:** Geht das Verfahren davon aus, dass alle Daten im Hauptspeicher sind, dann → **intern**
- Manchmal müssen Daten aus Platzgründen ausgelagert werden (Platte); Verfahren, die hier gut geeignet sind → **extern**

- **In situ:** Benötigt ein Sortieralgorithmus zusätzlich zur Eingabe höchstens konstant viel zusätzlichen Speicherplatz, dann → **in situ**

Eigenschaften von Sortierverfahren

- **Adaptiv:** Laufzeit abhängig von dem Grad der Vorsortierung der Daten; falls besser für vorsortierte Daten, dann → **adaptiv**

- **Stabil:** gleiche Reihenfolge von Datensätzen mit gleichem Schlüssel vor und nach dem Sortieren, dann → **stabil**

3.1 Allgemeine Sortierverfahren

- **Voraussetzung:** je zwei Schlüssel k_i und k_j sind vergleichbar, also entweder gilt $k_i \leq k_j$ oder $k_j \leq k_i$.

3.1.1 Insertion-Sort / Analyse

- **Anzahl der Schlüsselvergleiche:**
  $C_{best}(n)=$

InsertionSort(ref A)

Eingabe/Ausgabe: Zahlenfolge in Feld A[1..n]

```
(1) for k:=2,…,n {
(2)   key:=A[k]
(3)   i:=k
(4)   while i>1 and A[i−1]>key {
(5)     A[i]:=A[i−1]
(6)     i:=i−1
(7)   }
(8)   A[i]:=key
(9) }
```

3.1.1 Insertion-Sort / Analyse

- **Anzahl der Schlüsselvergleiche (Z. 4):**
  $C_{best}(n)=\Theta(n)$ und $C_{avg}(n)=C_{worst}(n)=\Theta(n^2)$

- **Anzahl der Datenbewegungen (Z. 2,5,8):**
  $M_{best}(n)=\Theta(n)$ und $M_{avg}(n)=M_{worst}(n)=\Theta(n^2)$

- **Eigenschaften:**
  - in situ?
  - adaptiv?
  - stabil?

Inversionen

In einer Permutation $\pi = <\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n>$ heißt ein Paar (π_i, π_j) eine **Inversion**, wenn gilt: $i < j$ und $\pi_i > \pi_j$.

- Die Anzahl der Inversionen einer Folge π heißt **Inversionszahl** und ist ein Maß für die Vorsortierung einer Folge.

- **Es gilt:** Eine Folge ist sortiert g.d.w. die Anzahl ihrer Inversionen gleich 0 ist.
- Im schlimmsten Fall besitzt eine Folge $\sum_{i=1..n-1}(n-i)=\Theta(n^2)$ viele Inversionen.

Beziehung zu InsertionSort(ref A)?

s_k:Anzahl der Durchführungen von (4)	Zeit	Wie oft?
(1) **for** k:=2,…,n {	t_1	n
(2) key:=A[k]	t_2	n-1
(3) i:=k	t_3	n-1
(4) **while** i>1 **and** A[i−1]>key {	t_4	Σs_k
(5) A[i]:=A[i−1]	t_5	$\Sigma(s_k-1)$
(6) i:=i−1	t_6	$\Sigma(s_k-1)$
(7) }	t_7	$\Sigma(s_k-1)$
(8) A[i]:=key	t_8	n-1
(9) }	t_9	n-1

Inversionen

- Die Anzahl der Schlüsselvergleiche und Datenbewegungen (und damit der Laufzeit) in `InsertionSort` hängt eng mit der Anzahl der Inversionen der Folge zusammen:
- Die Anzahl der Inversionen der Folge ist gleich $\sum_{k=2..n} (s_k-1)$.
- Die Laufzeit von Insertion Sort hängt direkt von der Anzahl der Inversionen der Folge ab.

3.1.2 Selection-Sort

Idee von „Sortieren durch Auswahl“:

- Bestimme Position $i_1 \in \{1,2,\dots,n\}$ zu der das Element mit **minimalem** Schlüssel auftritt; vertausche A[1] mit $A[i_1]$;
- Bestimme $i_2 \in \{2,\dots,n\}$ …, vertausche A[2] mit $A[i_2]$; etc.

Beispiel: s. VO und Skript

SelectionSort(ref A)

Eingabe/Ausgabe: Zahlenfolge in Feld A[1..n]

```
(1) for j:=1,2,…,n-1 {
(2)   minpos:=j
(3)   for i:=j+1,…,n {
(4)     if A[i].key < A[minpos].key then
(5)       minpos:=i
(6)   }
(7)   if minpos > j then
(8)     Vertausche A[minpos] mit A[j]
(9) }
```

Analyse von SelectionSort

- **Anzahl der Schlüsselvergleiche (Z. 4):**
  $C_{best}(n)=C_{avg}(n)=C_{worst}(n)=\Theta(n^2)$

denn:

$$C_{best}(n) = \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2} = \theta(n^2)$$

- **Anzahl der Datenbewegungen (Z. 8):**
  $M_{best}(n)=0$
  $M_{avg}(n)=M_{worst}(n)=\Theta(n)$

Eigenschaften von SelectionSort

- **Eigenschaften:**
  - in situ ?
  - adaptiv ?
  - stabil ?
- **Einsatz von SelectionSort, wenn:**
  - Bewegungen von Datensätzen teuer
  - Vergleiche zwischen Schlüsseln billig

3.1.3 Merge-Sort

Idee folgt dem „Divide and Conquer“-Prinzip („Teile und Erobere“):

- **Teile** das Problem in Teilprobleme auf.
- **Erobere** die Teilprobleme durch rekursives Lösen. Wenn sie klein genug sind, löse sie direkt.
- **Kombiniere** die Lösungen der Teilprobleme zu einer Lösung des Gesamtproblems.

wichtiges Algorithmen-Entwurfsprinzip!

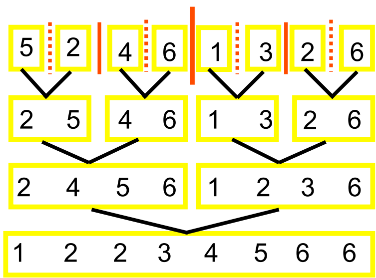
3.1.3 Merge-Sort

Idee von „Sortieren durch Mischen“:

- **Teile:** Teile die Folge in der Mitte in zwei Teilfolgen.
- **Erobere:** Sortiere beide Teilfolgen rekursiv. Für 1-elementige Teilfolgen ist nichts zu tun.
- **Kombiniere:** Verschmelze die sortierten Teilfolgen zu einer Gesamtfolge.

Merge Sort: älteste für den Computer entwickelte Sortieralgorithmus (John von Neumann 1945)

Ablauf von MergeSort



MergeSort(ref A,l,r)

procedure MergeSort(**ref** A,l,r)
- **var** Index m
- **if** l < r **then** {

(1) m:=⌊(l+r)/2⌋
(2) MergeSort(A,l,m)
(3) MergeSort(A,m+1,r)
(4) Merge(A,l,m,r)
(5) }

Aufruf: MergeSort(A,1,n)

Merge(ref A,l,m,r)

(1) **procedure** Merge(**ref** A,l,m,r)
(2) i:=l; j:=m+1
(3) **for** k:=l,…,r {
(4) **if** (i>m) **or** ((j≤r) **and** (A[i].key>A[j].key))
(5) **then**
(6) B[k]:=A[j]; j:=j+1
(7) **else**
(8) B[k]:=A[i]; i:=i+1
(9) }
(10) Schreibe sort. Folge zurück von B nach A

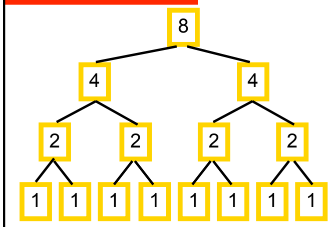
Rekursive Aufrufe unseres Beispiels

MergeSort(A,1,8)
MergeSort(A,1,4)
MergeSort(A,1,2)
MergeSort(A,1,1)
MergeSort(A,2,2)
Merge(A,1,1,2)
MergeSort(A,3,4)
MergeSort(A,3,3)
MergeSort(A,4,4)
Merge(A,3,3,4)
Merge(A,1,4,2) ….u.s.w.

Herleitung der Laufzeitfunktion

Sei $n=2^k$ für ein beliebiges k

weiter: s. nächste



Anzahl der Instanzen	Zeit pro Instanz	Gesamtzeit
1	8	8
2	4	8
4	2	8
8	1	8

Aufwand in jeder Stufe gleich $n=2^k$.

Es gibt $k+1=\log n + 1$ solcher Stufen

Gesamtaufwand:

$T(n) = n\,(1 + \log n) =$

$= n + n \log n = \Theta(n \log n)$