Kap. 6.5: Minimale Spannbäume ff

Professor Dr. Petra Mutzel

Karsten Klein

Lehrstuhl für Algorithm Engineering, LS11

Fakultät für Informatik, TU Dortmund

20. VO 2. TEIL DAP2 SS 2009 2. Juli 2009

Überblick

- 6.5: Minimale Spannbäume (MST) ff:
  - Algorithmus von ***Prim***

Grundideen

- MST: Algorithmus von ***Prim***
- Kürzeste Wege in Graphen (s. nächste Vorlesung): Algorithmus von ***Dijkstra***

Beide nutzen ähnliches Konzept:

- ***Greedy*** *(gierig, gefräßig)* später mehr dazu
- Priority Queue
- Lassen einzelnen Baum wachsen

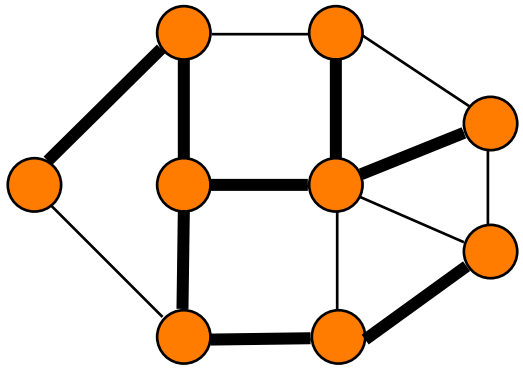
Algorithmus von **Prim**

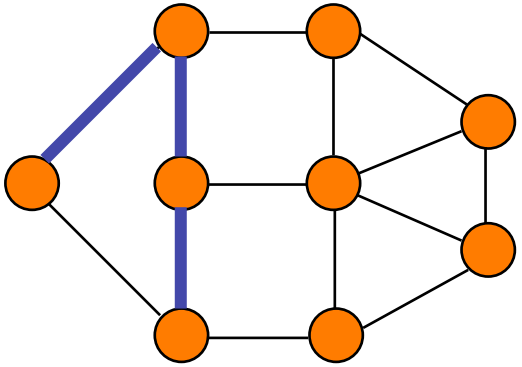
basiert auf MST Eigenschaft:

MST Eigenschaft

basiert auf:

Aussichtsreiche Menge *T* von Kanten:
Es existiert ein MST, der alle Kanten von *T* enthält.





MST Eigenschaft

Lemma 1 (Wiederholung):

Sei $G=(V,E)$ zshgd. mit Gewichtsfunktion w : $E \rightarrow R$.
Seien:

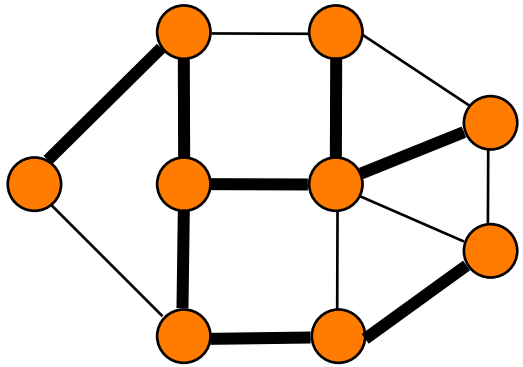
- $S \subset V$
- $T \subset E$ aussichtsreich und *keine* Kante aus T verlässt S
- $e \in E$ Kante mit minimalem Gewicht, die S verlässt

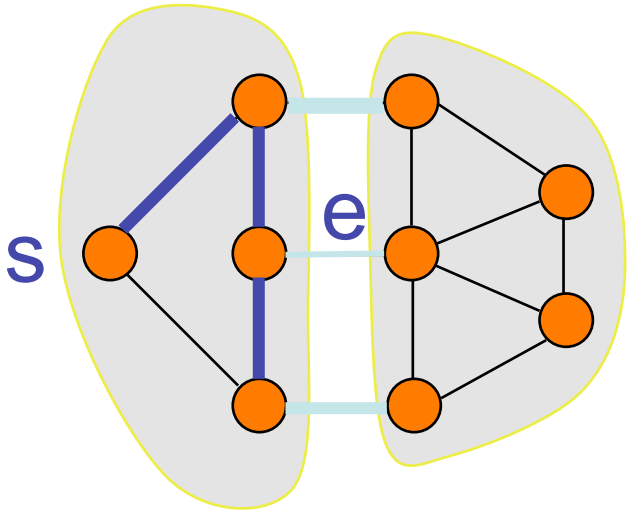
Dann ist $T \cup \{e\}$ aussichtsreich.

PRIMs Algorithmus: lasse Baum von s aus wachsen mit MST Eigenschaft

Kantenmenge T, aussichtsreich

Kante e verläßt S mit min. Gewicht





Knotenmenge S

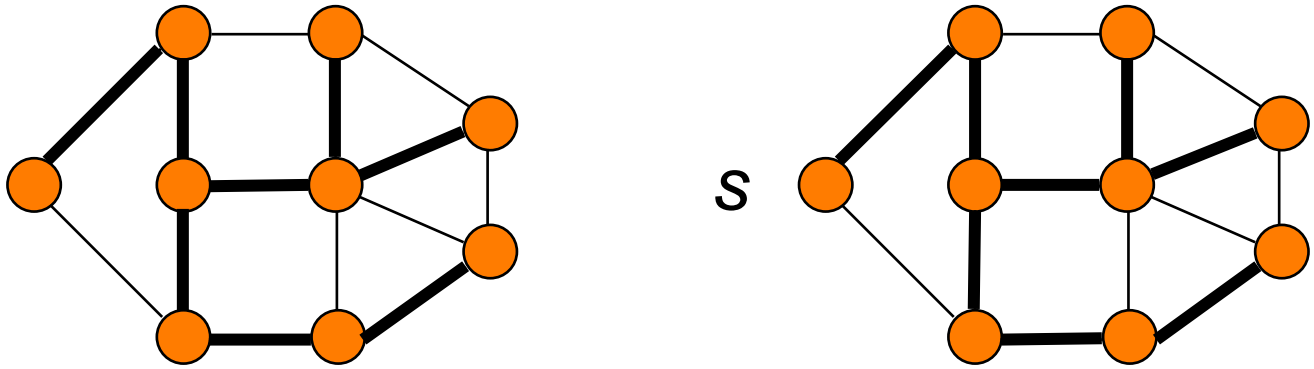
Dann: T∪e aussichtsreich

MST sind nicht eindeutig!!

Algorithmus von Prim

Vgl. mit Kruskal:

- Kruskal läßt Wald wachsen mit Union-Find bis Spannbaum erzeugt
- Prim läßt von Startknoten *s* einen einzelnen Baum wachsen



Algorithmus von Prim

Idee:

- Verwalte Menge ***S*** von Knoten in Unterbaum,ausgehend von ***s***, ***T*** leer
- Wähle billigste ***S*** verlassende Kante e=(u,v), v $\in$ ***S*** , e $\in$ ***T***

$\Rightarrow$ (Lemma 1) ***T*** aussichtsreich

- Stop, falls ***S***=***V*** $\Rightarrow$ ***T*** bildet MST

Schema: Algorithmus von Prim

Wähle Startknoten s ∈ V

S := {s}; T := ø // S Unterbaumknoten, T Kanten

while $S \neq V$ **do {**

  Wähle $e = (u, v)$, e verläßt S mit *min. Gewicht*

  $T := T \cup \{e\}$: $S := S \cup \{v\}$

}

Korrektheit Prim

Induktion über Kanten $e_1,\ldots,e_k$, die zu T hinzugefügt werden:
Zeige: $T_i = \{e_1,\ldots,e_i\}$ aussichtsreich für $0 \le i \le k$

i = 0: $T_0 = \emptyset \Rightarrow$ aussichtsreich

$1 \le i \le k$: T_{i-1} aussichtsreich, S Knotenmenge vor Hinzunahme von e_i, keine Kante aus T_{i-1} verläßt S

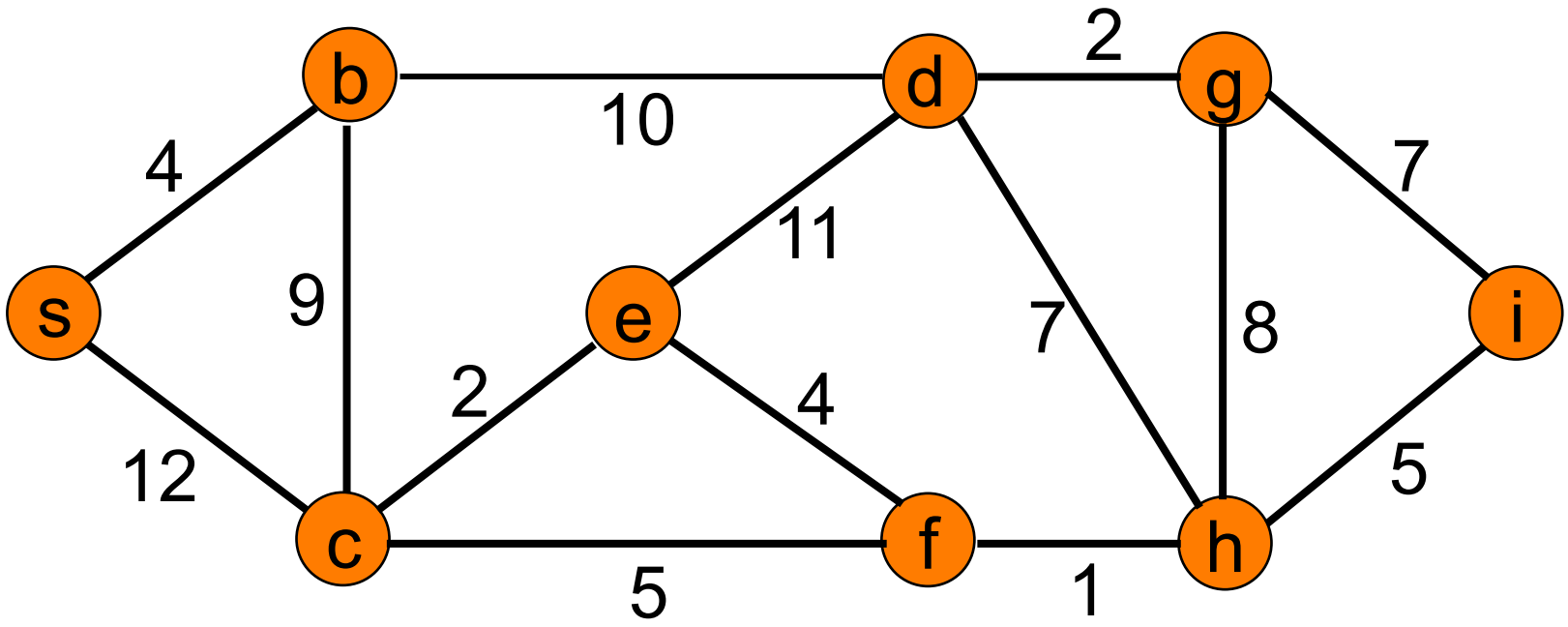
$\Rightarrow e_i$ leichteste S verlassende Kante

$\Rightarrow$ *Mit Lemma 1: $T_i = T_{i-1} \cup \{e_i\}$ aussichtsreich*

Und: Keine Kante aus T_i verläßt neues S

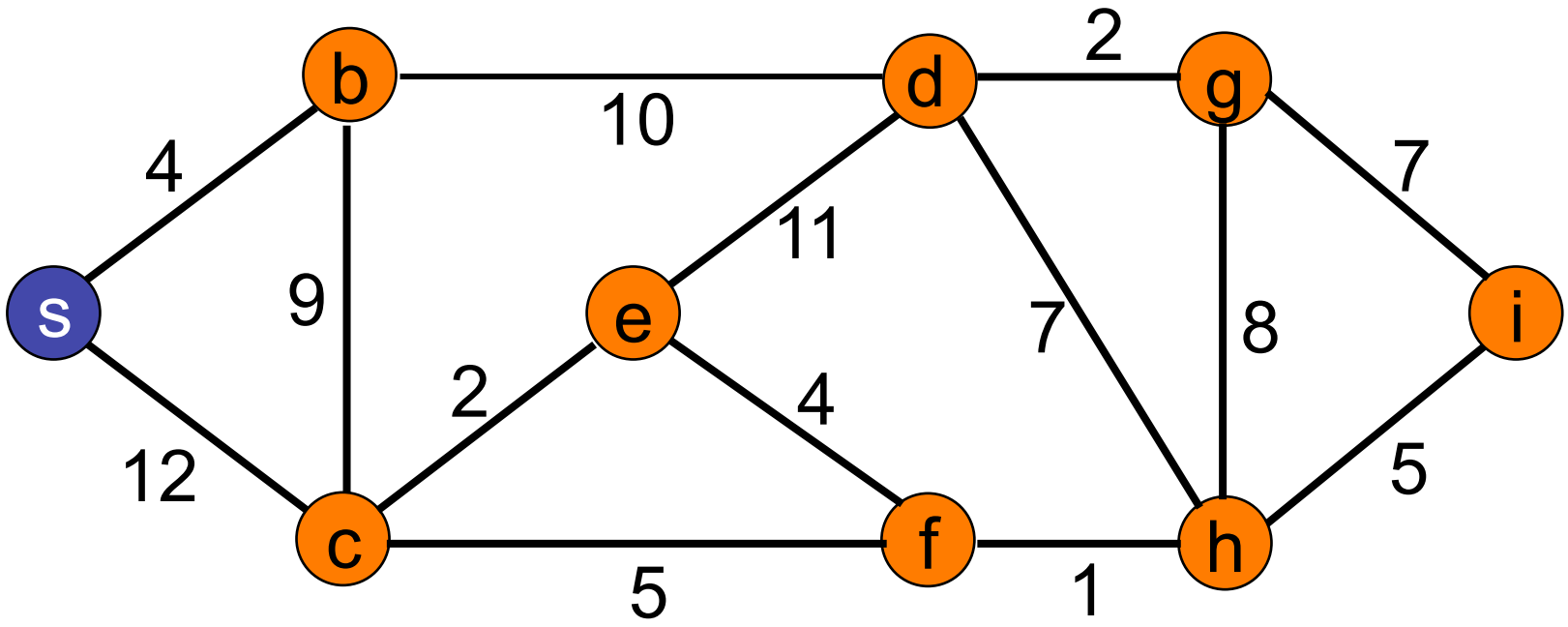
Am Ende hat T genau |V|-1 Kanten $\Rightarrow$ MST

Algorithmus von Prim



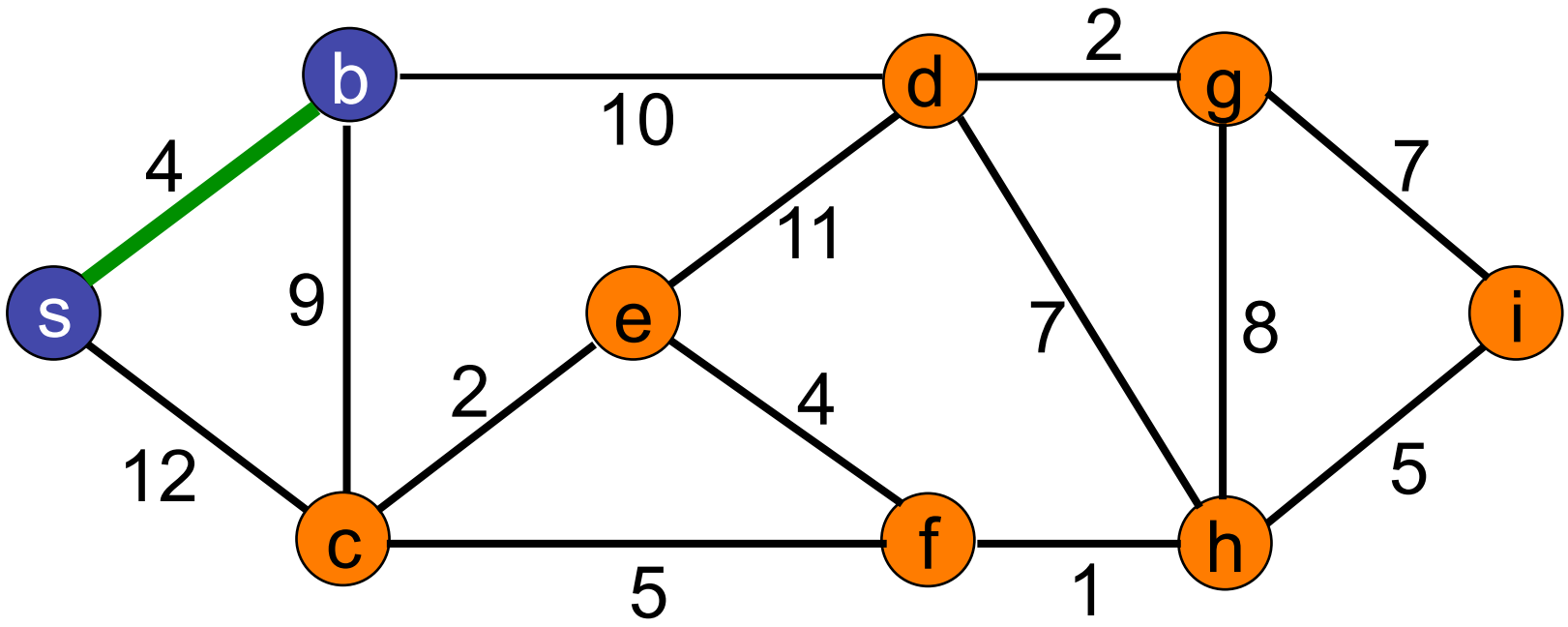
Knotenmenge S, Kantenmenge T:
In Teilbaum T_i

Algorithmus von Prim



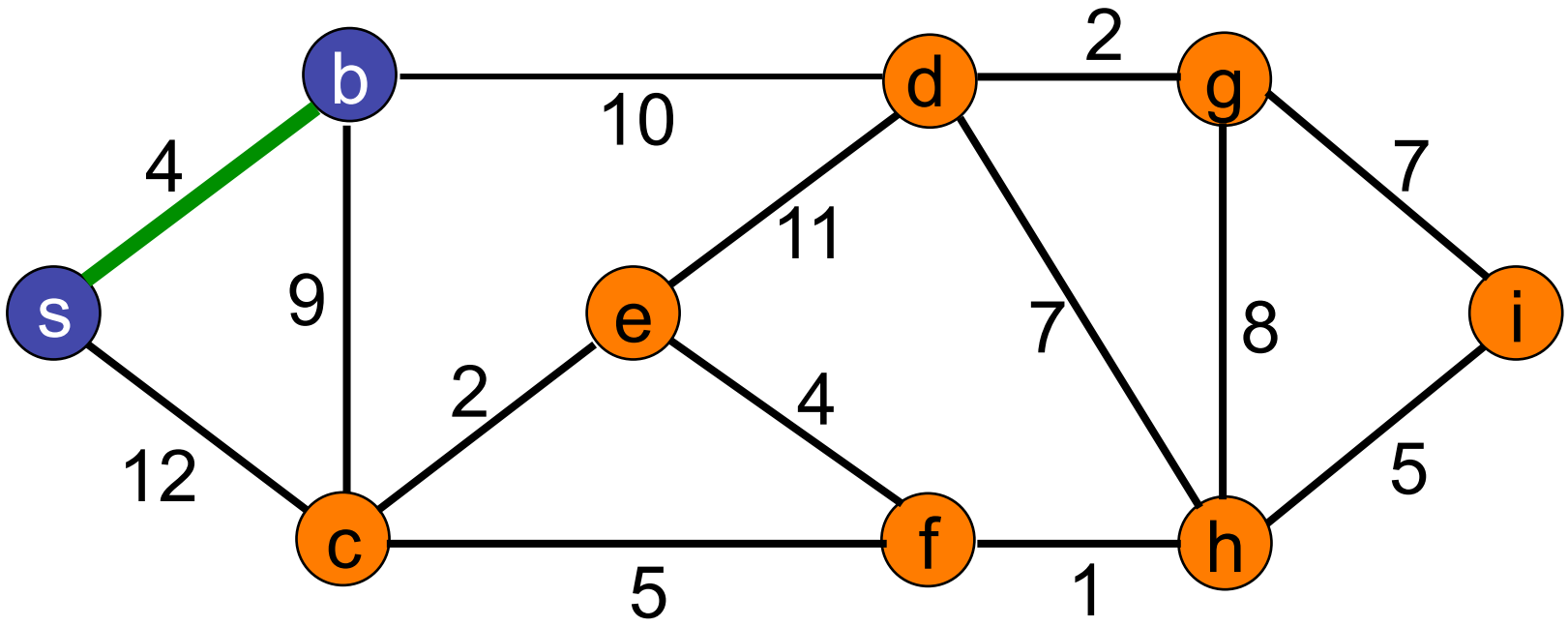
Knotenmenge S, Kantenmenge T:
In Teilbaum T_i

Algorithmus von Prim



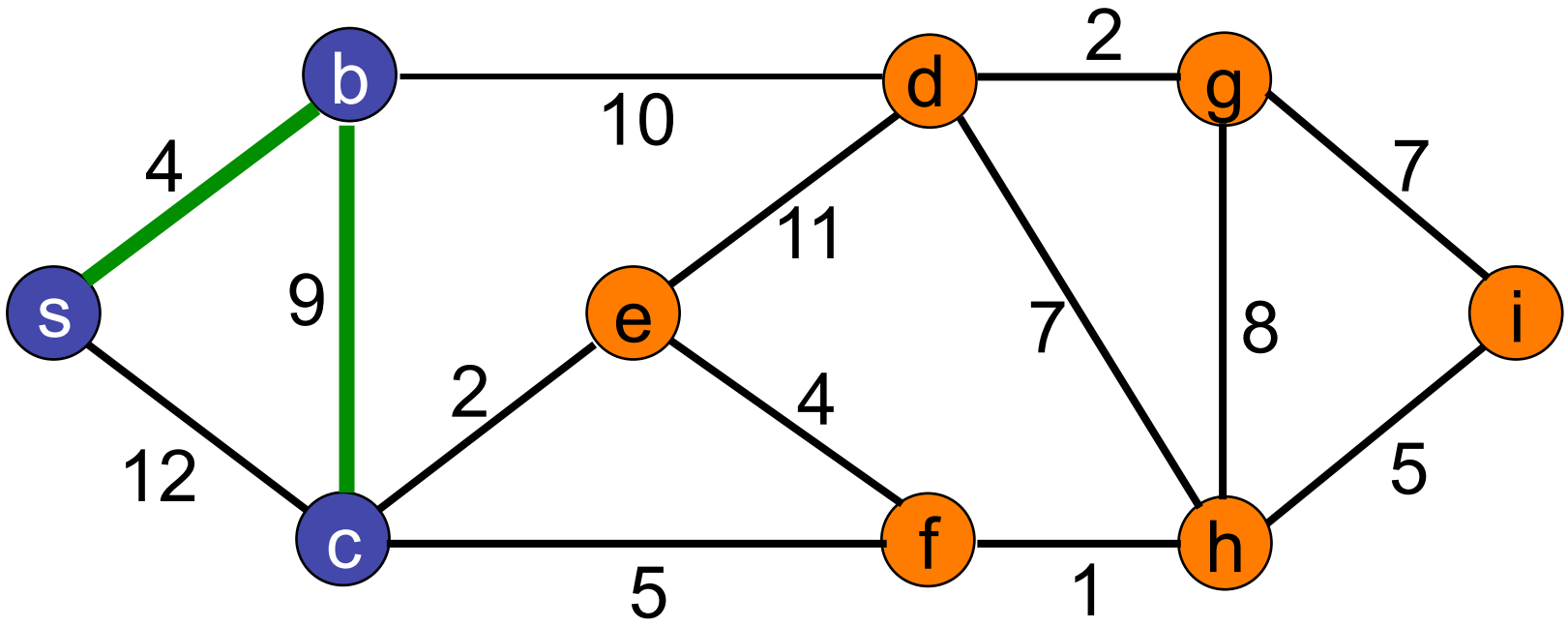
Knotenmenge S, Kantenmenge T:
In Teilbaum T_i

Algorithmus von Prim



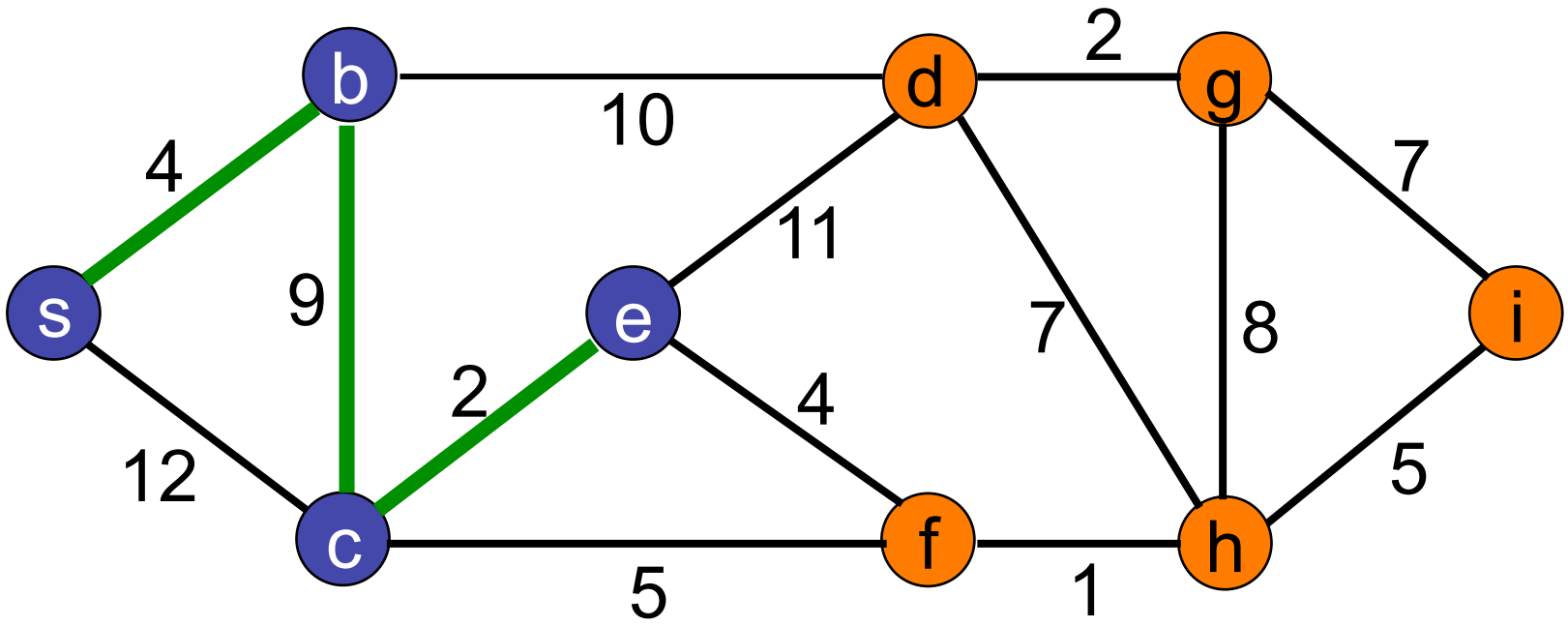
Knotenmenge S, Kantenmenge T:
In Teilbaum T_i

Algorithmus von Prim



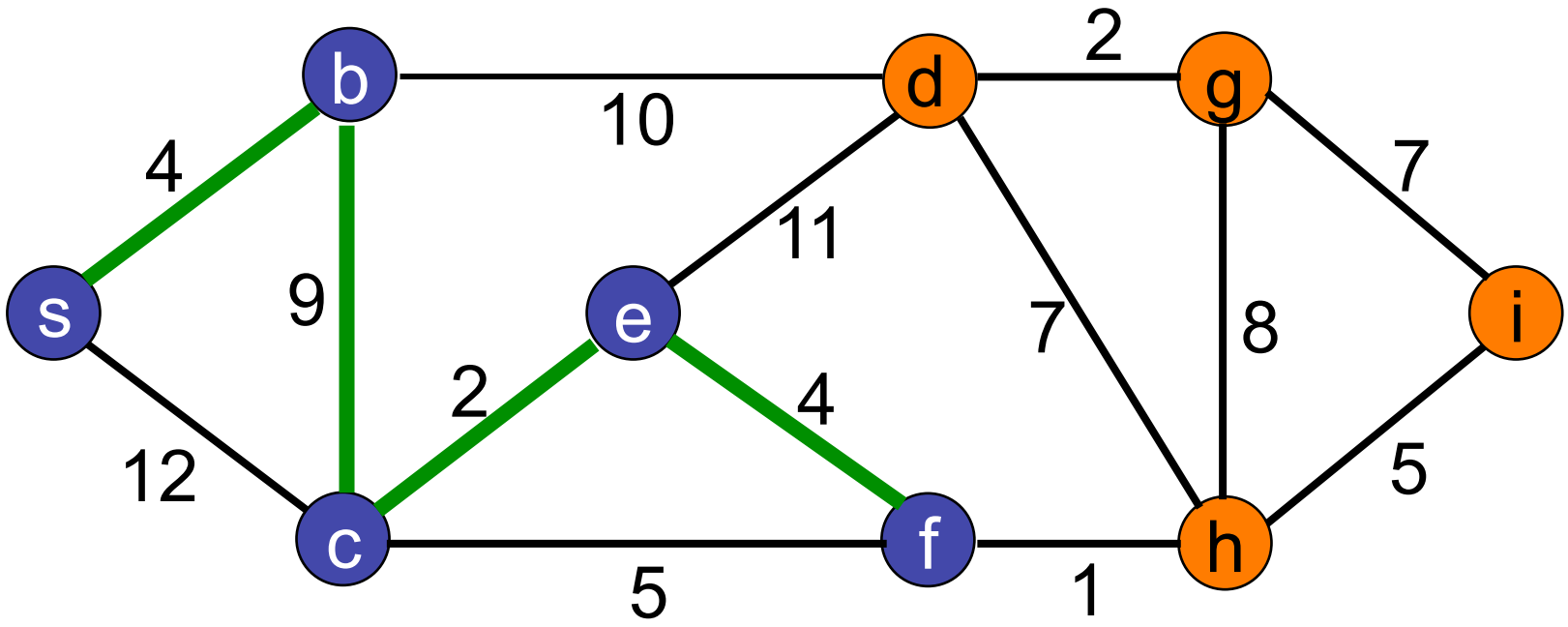
Knotenmenge S, Kantenmenge T:
In Teilbaum T_i

Algorithmus von Prim



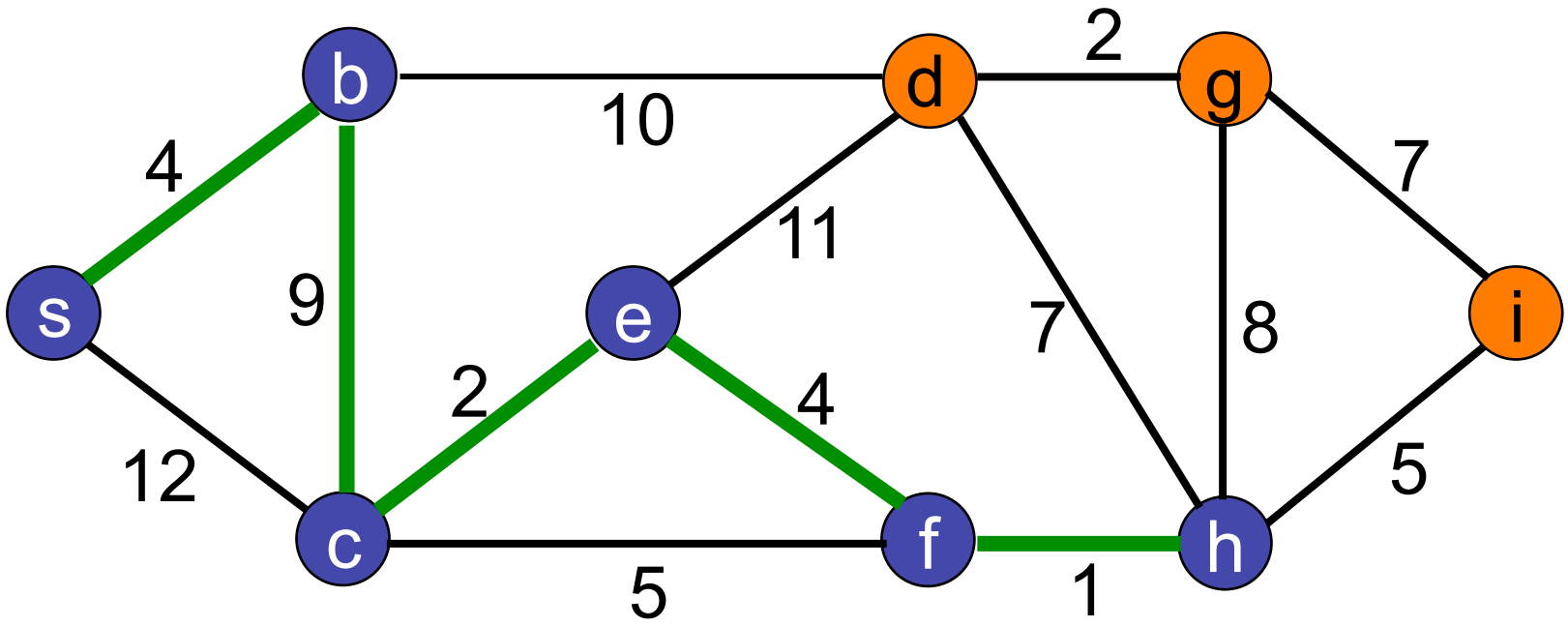
Knotenmenge S, Kantenmenge T:
In Teilbaum T_i

Algorithmus von Prim



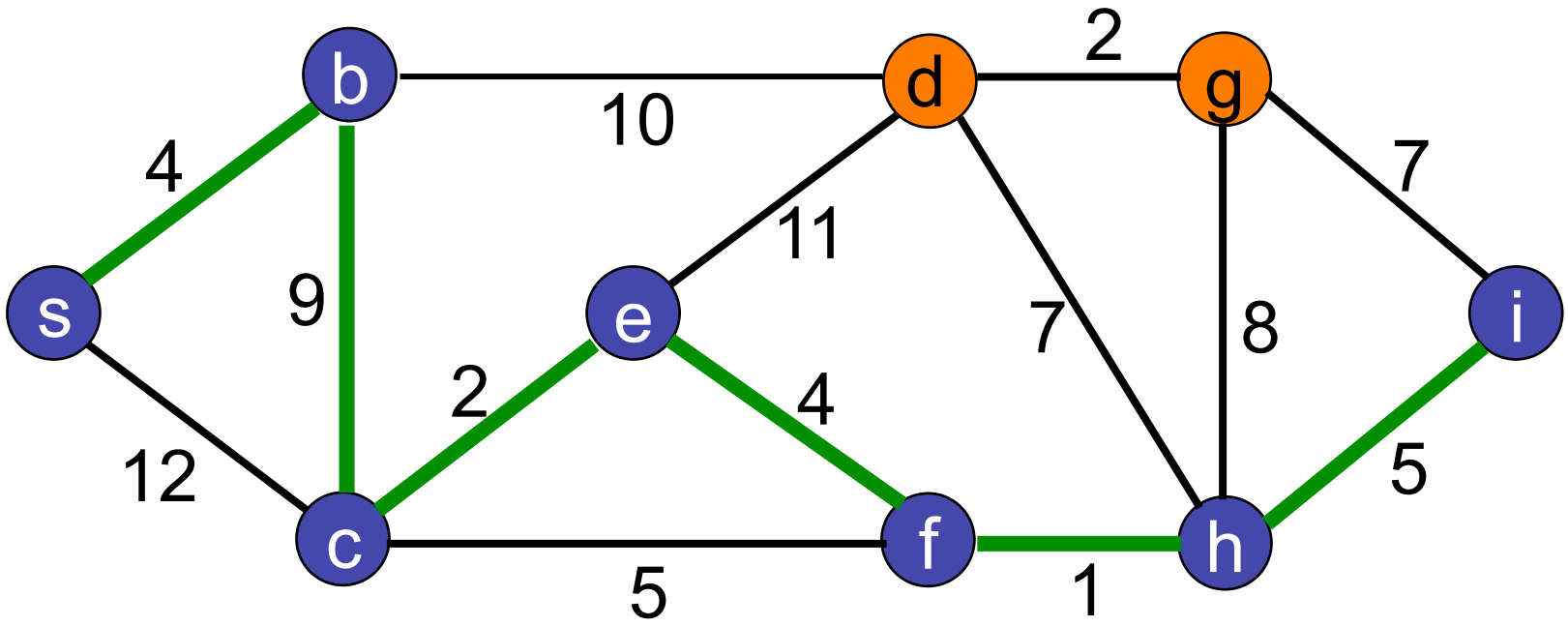
Knotenmenge S, Kantenmenge T:
In Teilbaum T_i

Algorithmus von Prim



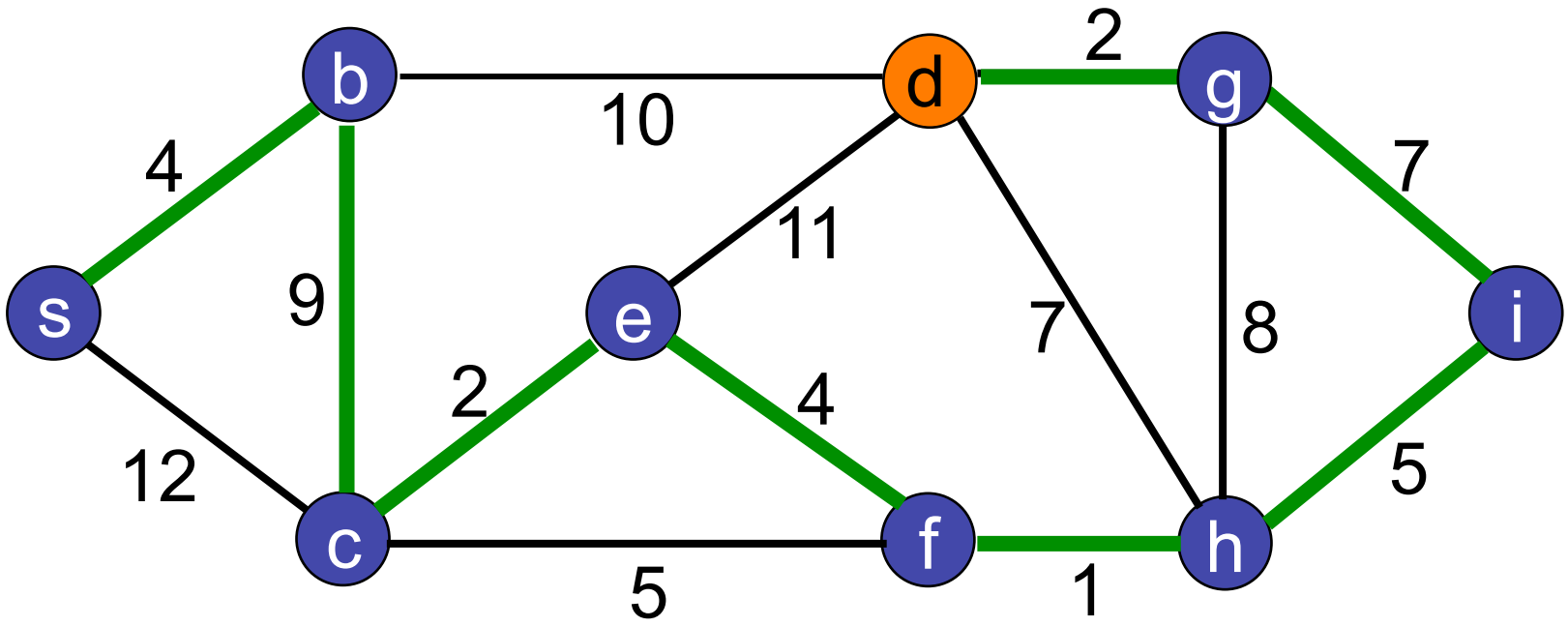
Knotenmenge S, Kantenmenge T:
In Teilbaum T_i

Algorithmus von Prim



Knotenmenge S, Kantenmenge T:
In Teilbaum T_i

Algorithmus von Prim



Knotenmenge S, Kantenmenge T:
In Teilbaum T_i

Schema: Algorithmus von Prim

Wähle Startknoten s ∈ V

S := {s}; T := ø // S Unterbaumknoten, T Kanten

while $S \neq V$ **do {**

  Wähle $e = (u, v)$, e verläßt S mit *min. Gewicht*

  $T := T \cup \{e\}$: $S := S \cup \{v\}$

}

Effiziente Realisierung?

Realisierung von Prim

- Testen auf Kreise (Union-Find Partition) wie bei Kruskal nicht nötig
- Kein Sortieren nötig
- Auswahl leichtester Kante nötig
  $\Rightarrow$ Priority Queue
- Wir speichern nicht die Kanten selbst, sondern die Knoten $v \in V \setminus S$. Priorität ist das Gewicht der Kante von S nach v

Dazu: ADT Priority Queue

- Dyn. Verwaltung von Elementmenge mit *Prioritäten*
- Operationen:
  - INSERT(p, v) : Position // Knoten v, Priorität p
  - DELETE(pos)
  - MINIMUM() : Position
  - EXTRACTMIN() : P x V //Rückg: min-Knoten und prio
  - DECREASEPRIORITY(pos, p) // neue Priorität p
- Bekannt: Binary (Min-)Heap in Array

Pseudo-Code: Initialisierung

```
G=(V, E), float w[E]                          // Graph und Gewichte
(1) var π[V], PriorityQueue Q, pos[V]         // π: Vorgänger in MST
                                              // pos: Position in Q
(2) for each  u ∈ V \ {s} do {
(3)   pos[u] := Q.INSERT(∞, u)
(4) }
(5) pos[s] := Q.INSERT(0, s)
(6) π[s] := nil
```

Pseudo-Code Prim

```
(7)  while not Q.ISEMPTY()  do                  // über alle Knoten
(8)      (p, u) := Q.EXTRACTMIN()
(9)      pos[u] := nil                  // gewählten Knoten entfernen
(10)     for all e = (u,v) ∈ E(u) do {     // ausgehende Kanten
(11)        if pos[v] ≠ nil and                    // e verlässt S?
(12)           w(e) < Q.PRIORITY(pos[v]) then {    // günstiger?
(13)                 Q.DECREASEPRIORITY(pos[v], w(e))
(14)                 π[v] := u
(15) } } }
```

Analyse

- Aufbau des Heaps für PQ: in $\Theta(|V|)$
- $|V|$ Durchläufe der while-Schleife mit EXTRACTMIN $\Rightarrow$ $O(|V| \log |V|)$
- 2 Durchläufe der forall-Schleife für jede Kante
- max. $|E|$ Aufrufe von DECREASEPRIORITY $\Rightarrow$ $O(|E| \log |V|)$

Gesamtlaufzeit $O(|E| \log |V|)$, da $|E| \geq |V|-1$

Warum kann Greedy-Verfahren funktionieren?

- MST besteht aus Teilbäumen, die ebenfalls MSTs sind
- Lokal beste Entscheidung (leichteste Kante) führt zu MST

nächste VO: kürzeste Wege Algorithmen