Kap. 6: Graphen

Professor Dr. Petra Mutzel

Lehrstuhl für Algorithm Engineering, LS11

Fakultät für Informatik, TU Dortmund

16. VO *2. Teil* DAP2 SS 2009 18. Juni 2009

Motivation

„Warum soll ich heute hier bleiben?"

Graphen sind wichtig und machen Spaß!

„Was gibt es heute Besonderes?"

schöne Bilder

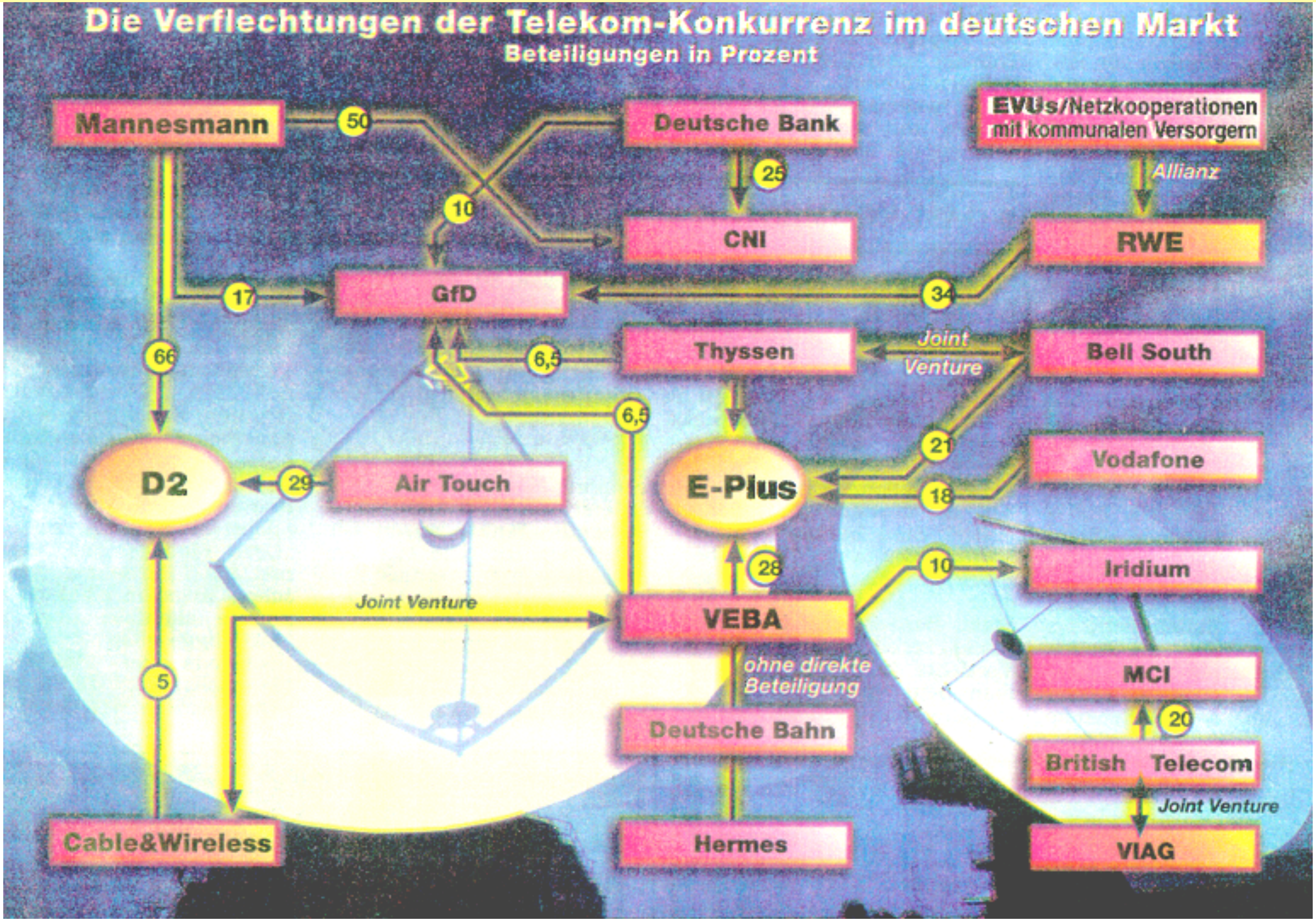
Überblick

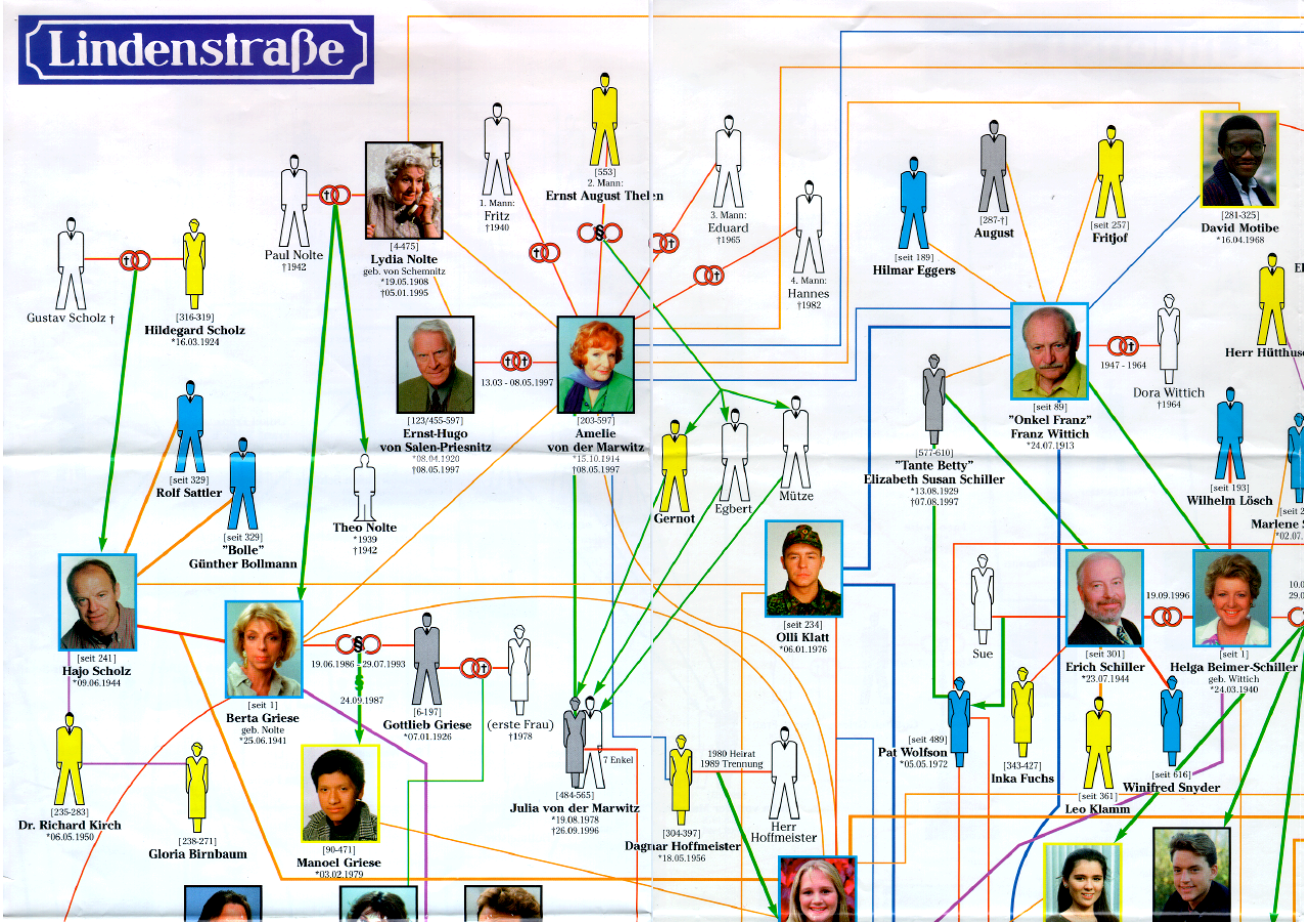
- Motivation und Einführung

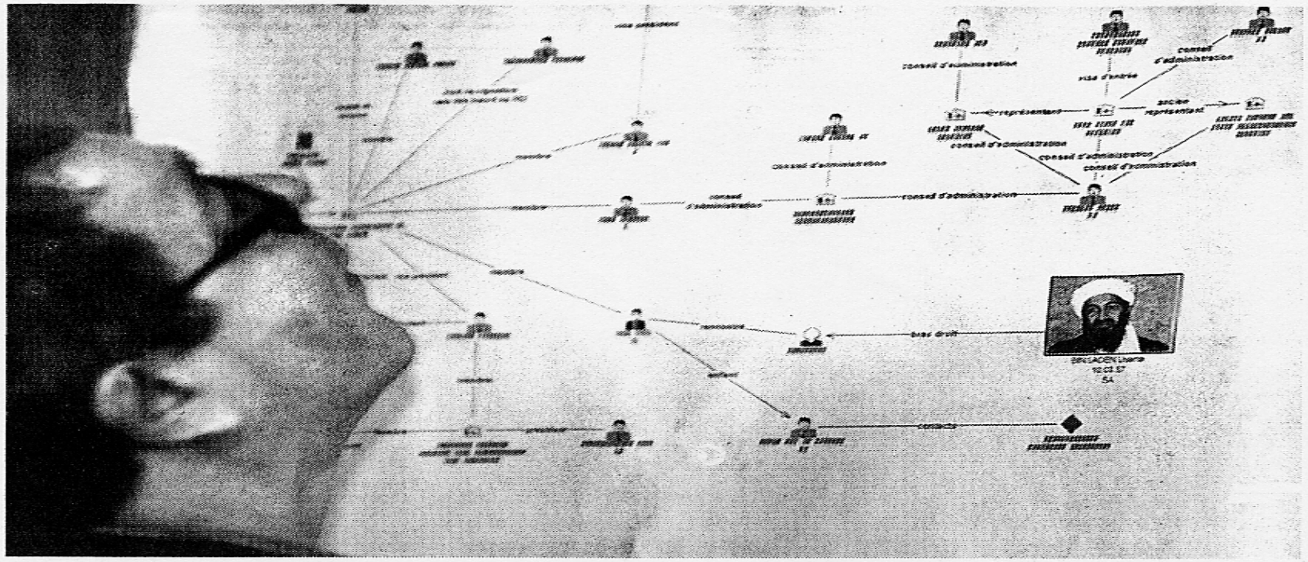
- Datenstrukturen

- Traversieren von Graphen:
  - Breitensuche (BFS)
  - Tiefensuche (DFS)

Graph: Objekte und Beziehungen zwischen den Objekten




Lindenstraße
[553]
2. Mann:
Ernst August Thelen
1. Mann:
Fritz
†1940
3. Mann:
Eduard
†1965
4. Mann:
Hannes
†1982
Paul Nolte
†1942
[4-475]
Lydia Nolte
geb. von Schemnitz
*19.05.1908
†05.01.1995
Gustav Scholz †
[316-319]
Hildegard Scholz
*16.03.1924
[seit 189]
Hilmar Eggers
[287-†]
August
[seit 257]
Fritjof
[281-325]
David Motibe
*16.04.1968
Herr Hütthus
13.03 - 08.05.1997
[123/455-597]
Ernst-Hugo
von Salen-Priesnitz
*08.04.1920
†08.05.1997
[203-597]
Amelie
von der Marwitz
*15.10.1914
†08.05.1997
Gernot
Egbert
Mütze
1947 - 1964
Dora Wittich
†1964
[seit 89]
"Onkel Franz"
Franz Wittich
*24.07.1913
[577-610]
"Tante Betty"
Elizabeth Susan Schiller
*13.08.1929
†07.08.1997
[seit 193]
Wilhelm Lösch
Marlene
[seit 329]
Rolf Sattler
[seit 329]
"Bolle"
Günther Bollmann
Theo Nolte
*1939
†1942
[seit 234]
Olli Klatt
*06.01.1976
[seit 241]
Hajo Scholz
*09.06.1944
[seit 1]
Berta Griese
geb. Nolte
*25.06.1941
19.06.1986 - 29.07.1993
24.09.1987
[6-197]
Gottlieb Griese
*07.01.1926
(erste Frau)
†1978
7 Enkel
[484-565]
Julia von der Marwitz
*19.08.1978
†26.09.1996
Sue
19.09.1996
[seit 301]
Erich Schiller
*23.07.1944
[seit 1]
Helga Beimer-Schiller
geb. Wittich
*24.03.1940
[seit 489]
Pat Wolfson
*05.05.1972
[343-427]
Inka Fuchs
[seit 616]
Winifred Snyder
[seit 361]
Leo Klamm
[235-283]
Dr. Richard Kirch
*06.05.1950
[238-271]
Gloria Birnbaum
[90-471]
Manoel Griese
*03.02.1979
1980 Heirat
1989 Trennung
[304-397]
Dagmar Hoffmeister
*18.05.1956
Herr
Hoffmeister



Ein Schaubild über die Verzweigung des Terrornetzwerkes zeigte am Donnerstag die Schweizer Regierung. Mittendrin: Osama Bin Laden. BILD: RTR

US-Präsident Bush gelingt Schlag gegen Bin Ladens Finanznetz

In der Schweiz und in Somalia wird gegen Verdächtige ermittelt

US-Präsident Bush hat die Vermögenswerte von zwei in mehr als 40 Ländern operierenden Finanzgruppen einfrieren lassen. Sie sollen Millionen-Beträge für Bin Laden und dessen Organisation El Kaida verschoben haben.

Washington/Bern - Weltweit wurden am Donnerstag die Vermögenswerte von 62 Einzelpersonen und Gruppen mit vermuteten Verbindungen zu Terrororganisationen und zu zwei Finanznetzwerken in der Schweiz und Somalia eingefroren. Dabei handelt es sich um 43 Millionen Dollar. Zu den verdächti-
gen Personen gehört A
rich Armand Huber aus
fundamentalistischer M
Mit den neuen 62 Namen
die Zahl von Organisatio
dividuen, deren finanz
gungsfreiheit die USA
haben, auf 150.

Bush und Finanzmi
O'Neill sprachen von ei
ren Schlag gegen den T

der neuen Aktion sind die Netzwerke Al Taqwa und Al Barakaat betroffen. Das von Somalia aus operierende Al-Barakaat-Netz gilt als weitaus bedeutender als Al Taqwa. Es wurde nach amerikanischen Erkenntnissen 1989 von einem engen Gefolgsmann Bin Ladens gegründet. Al Barakaat steht im Verdacht, die El Kaida jährlich mit Dutzenden Millionen Dollar versorgt zu haben. Das Netzwerk operiere als „hawala". Das ist eine Art inoffizielle

160 deutsche Konten gesperrt

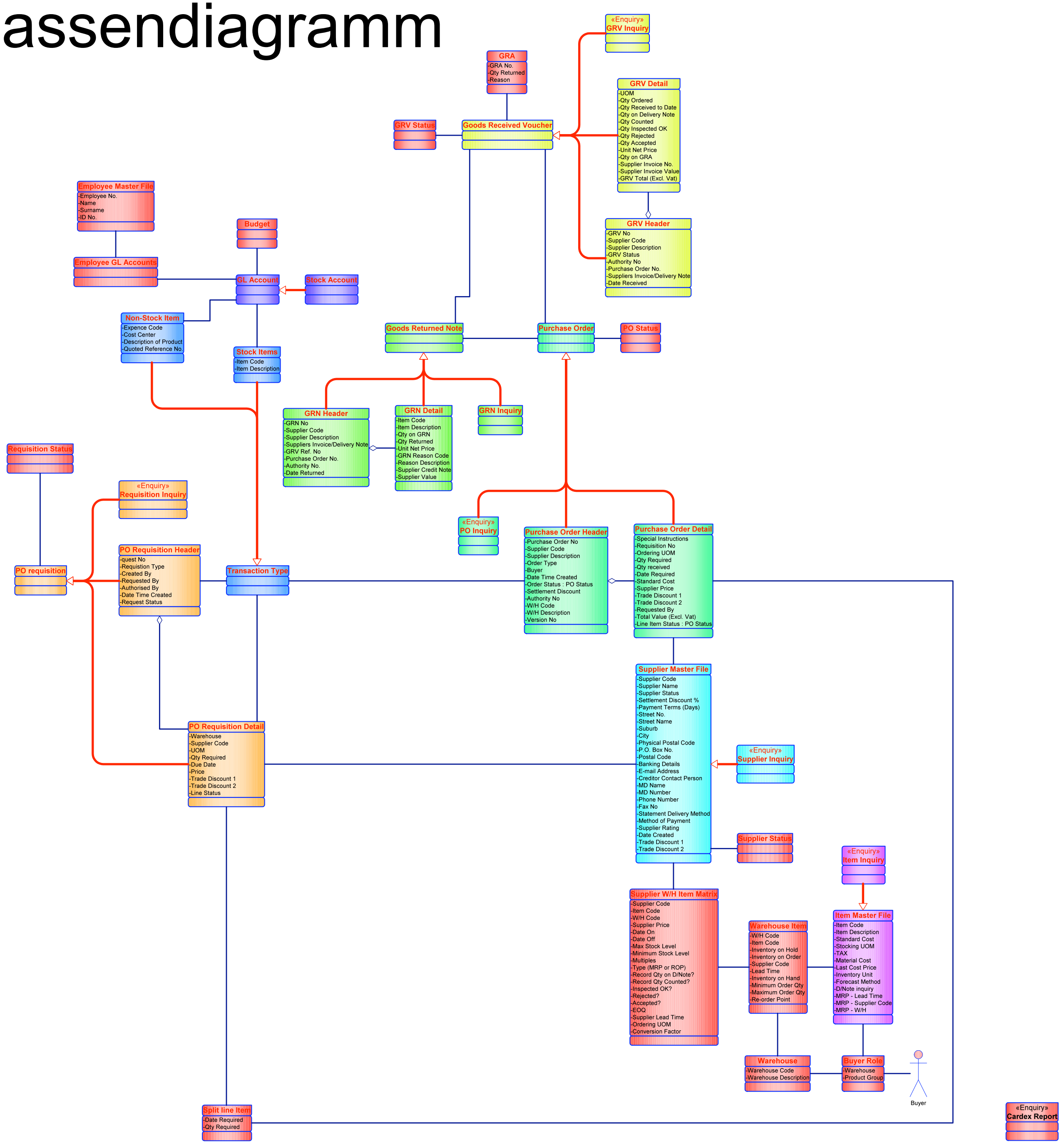
In Deutschland sind derzeit noch rund 160 Konten mutmaßlicher Hintermänner oder Unterstützer des internationalen Terrorismus

Bank, die internationale Geldtransfers durchführt, ohne dabei den Kontrollen und Regulierungen eines lizenzierten Geldinstitutes unterworfen zu sein.

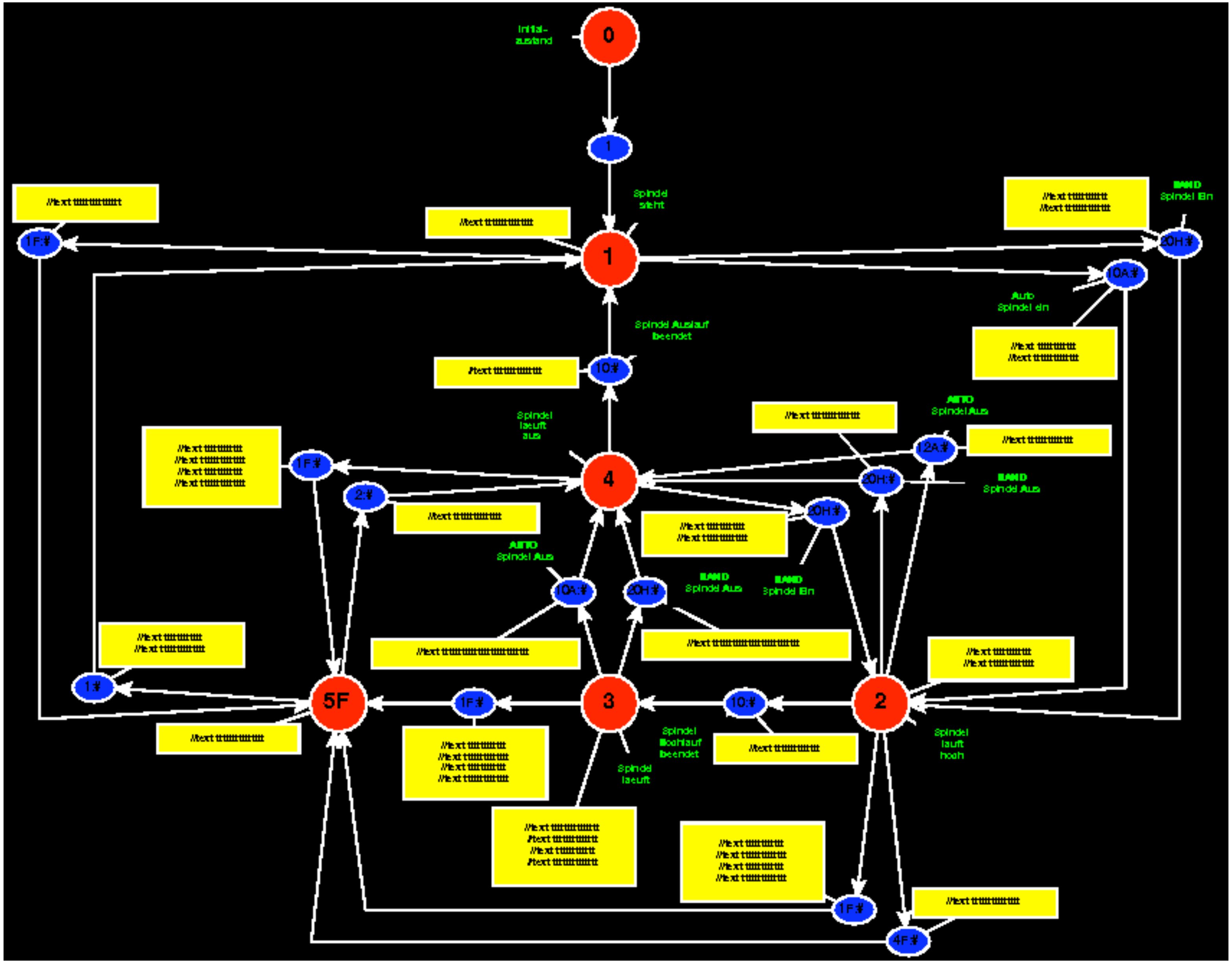
Die Mittel für El Kaida wurden O'Neill zufolge von den Gebühren „abgezweigt", die Kunden für die Transfers bezahlen. Al Taqwa mit Hauptsitz in der Schweiz fungierte vor allem als Investment-Berater für die El Kaida. Beide Gruppen sollen aber auch Waffentransporte finanziert und bei der Kommunikation zwischen Terroristen geholfen haben. Gegen die Chefs der Nada Management Organisation SA, zwei Ägypter, wird wegen der Mitgliedschaft in einer kriminellen Vereinigung ermittelt. Die Gesellschaft führte vor den Anschlägen in den
usatz Al Taqwa in
räsident des Ver-
er 73-jährige Mo-
der von 1968 bis
r Automatik an der
echnischen Hoch-
rich war. Auf US-
lizei auch in den
raten, in Saudi-
nstein und in der
n. (dpa, rtr, ap)

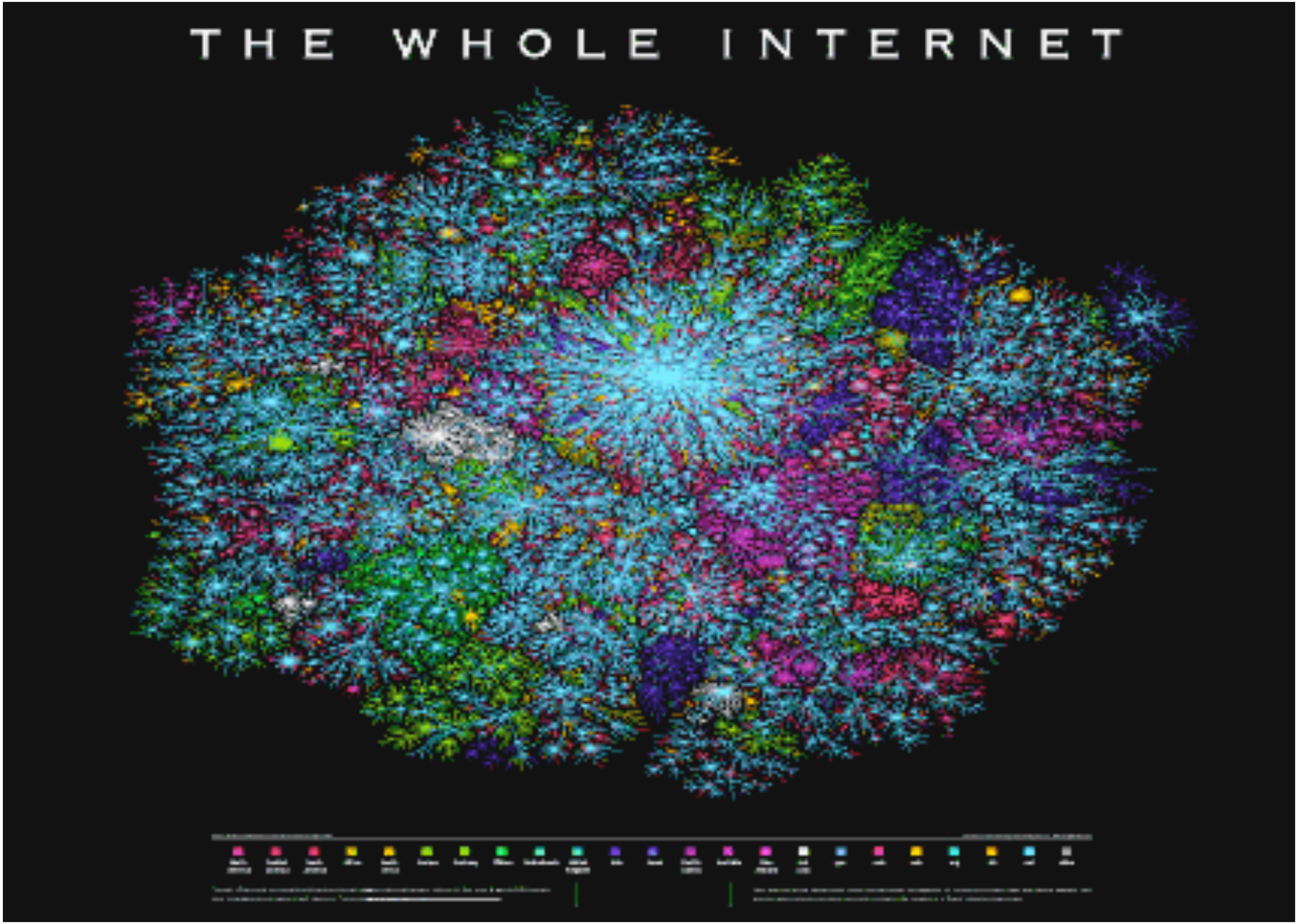
Kölner Stadtanzeiger 09.11.2001

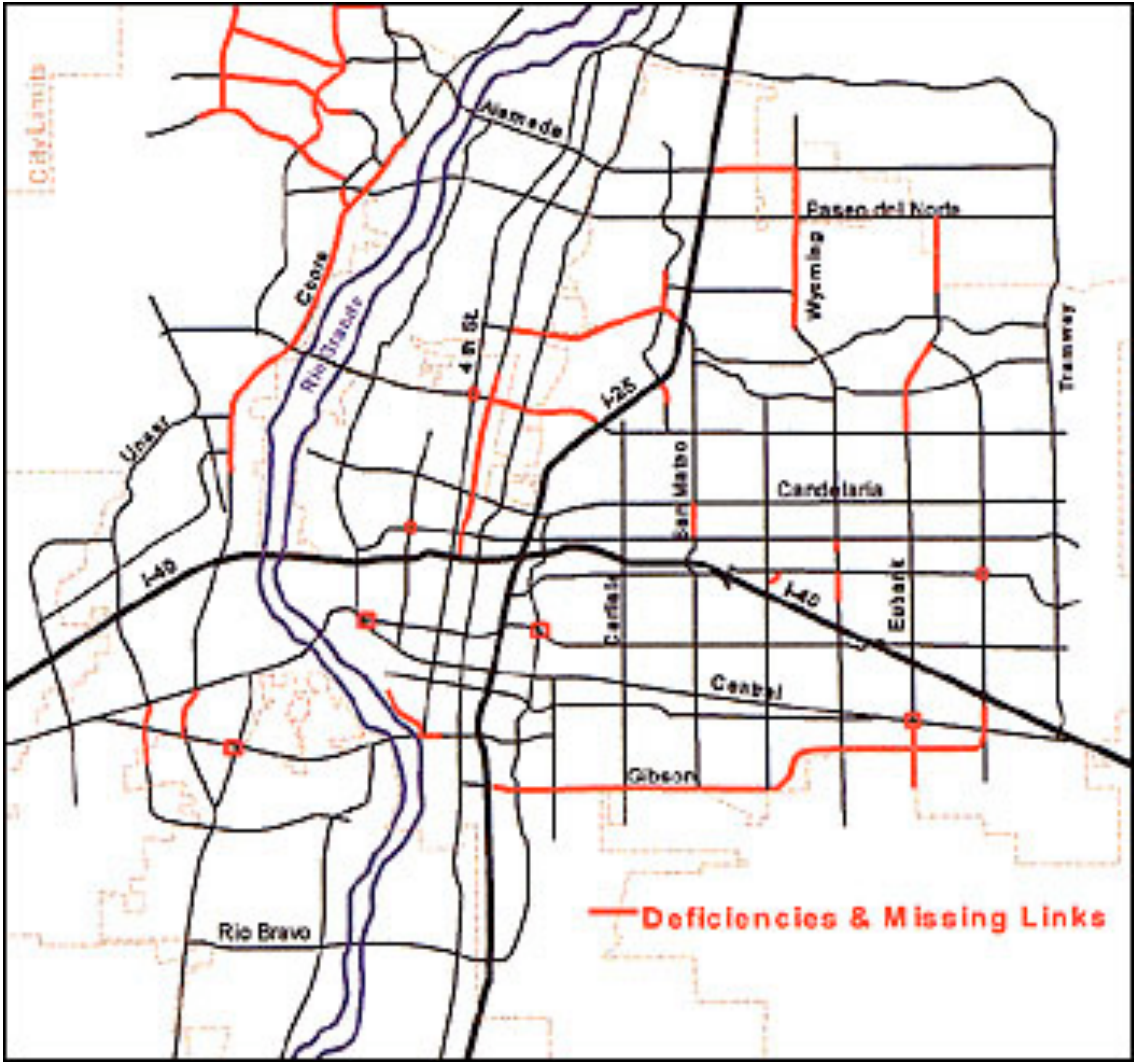
UML-Klassendiagramm



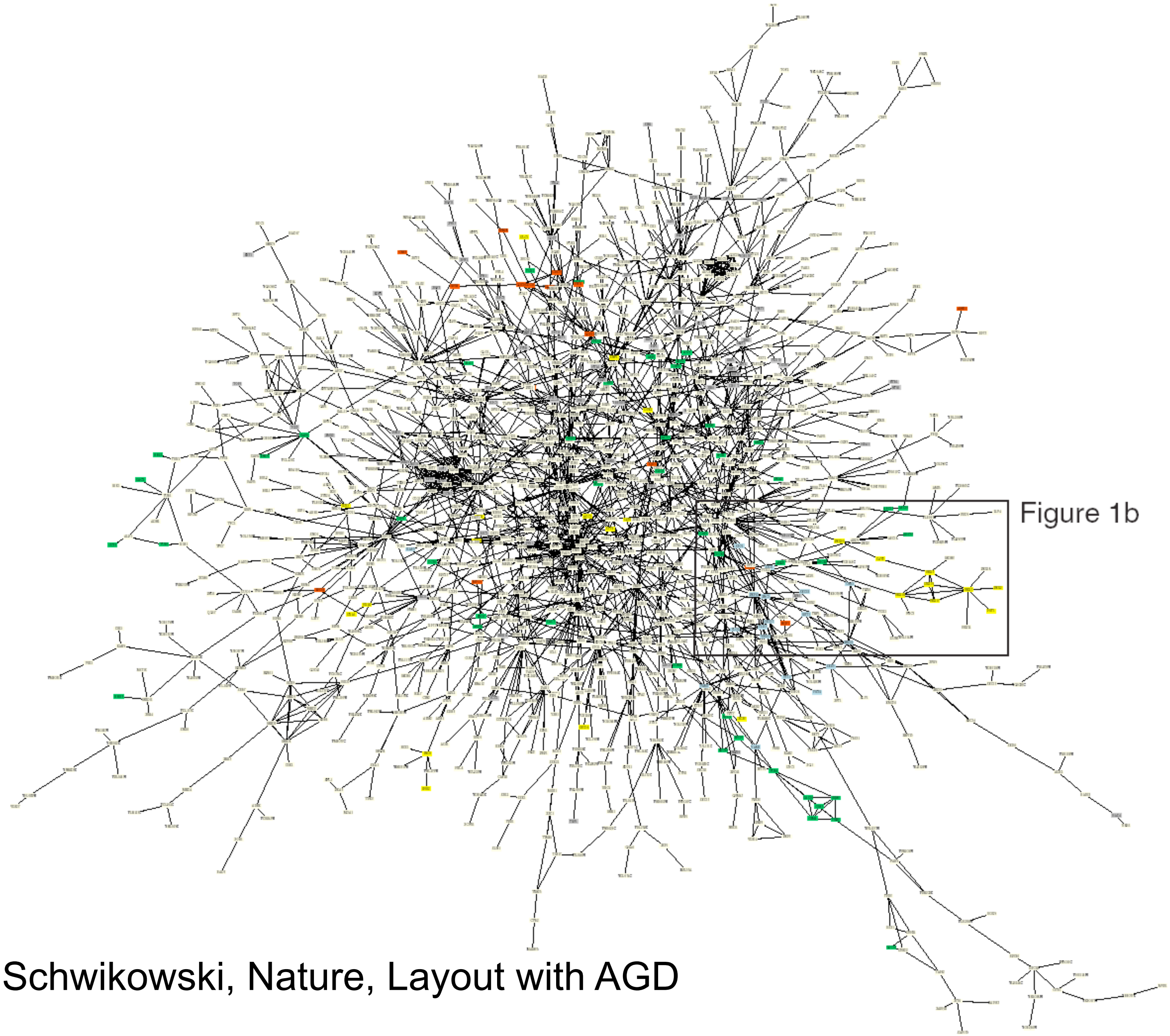
Endlicher Automat




THE WHOLE INTERNET

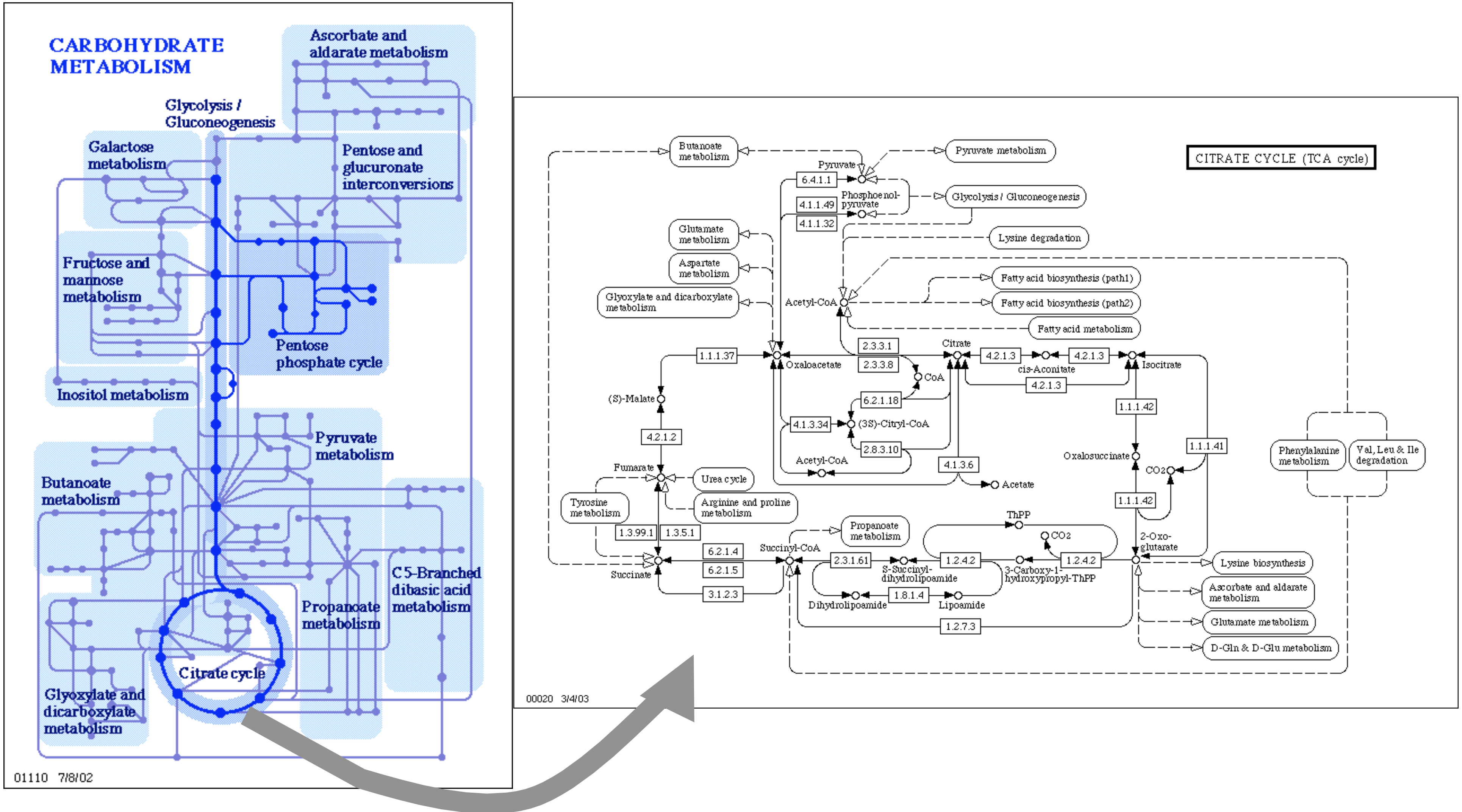

Alameda
Paseo del Norte
Coors
Rio Grande
4th St.
Wyoming
Tramway
I-25
Unser
San Mateo
Candelaria
I-40
Carlisle
Eubank
Central
Gibson
Rio Bravo
Deficiencies & Missing Links

Protein-Protein Interaction Network

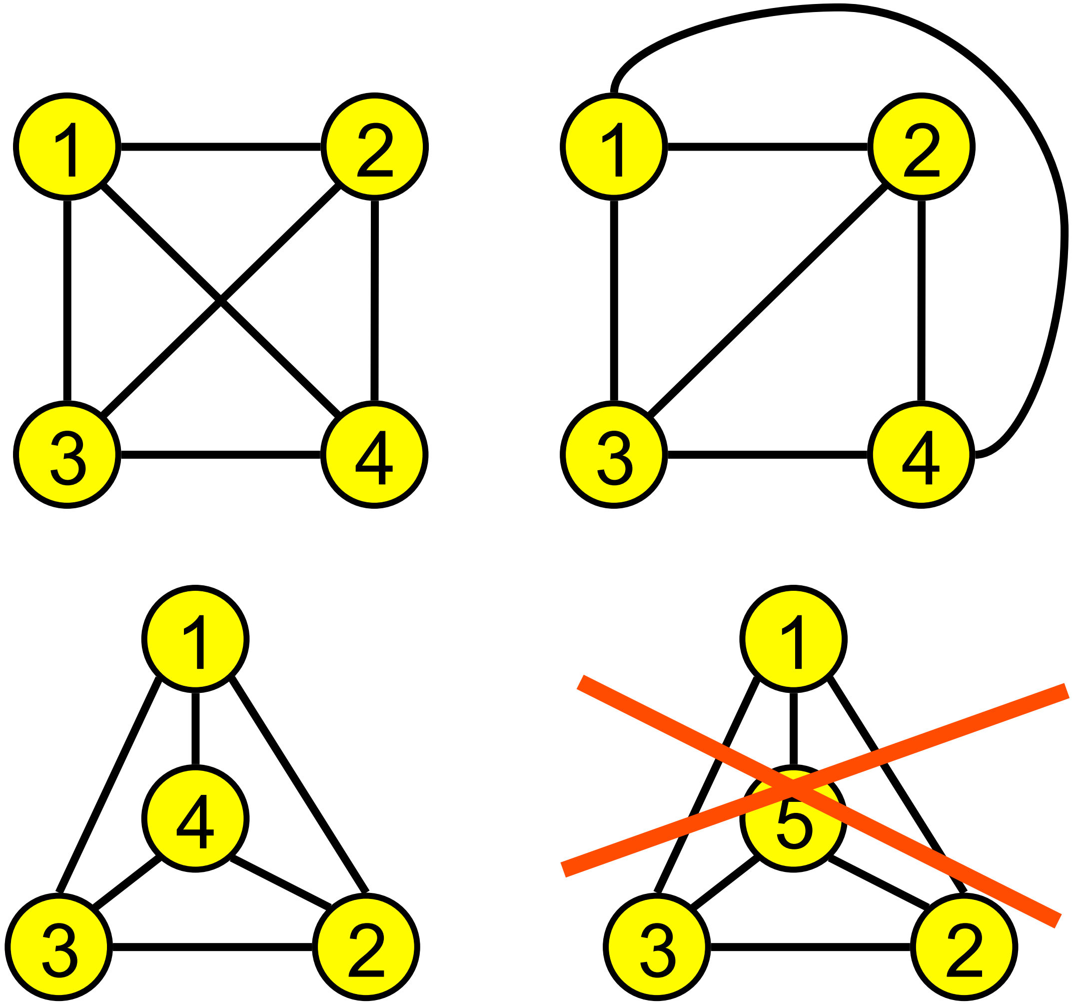


Benno Schwikowski, Nature, Layout with AGD

Metabolic Pathways



Verschiedene Zeichnungen des selben Graphen



Graph $G=(V,E)$ mit $V=\{1,2,3,4\}$ und E gegeben durch

$$E=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

Motivation

- Graphen modellieren diskrete Strukturen
- hilfreich zur Analyse und Optimierung

- Straßen-, Bahnnetze: kürzeste Wege
- Modellierung von Prozessen, z.B. Geschäftsprozesse, Betriebsabläufe
- Proteininteraktionsnetzwerke in der molekularen Biologie

Kap. 6.1 Definition (Graph)

Graph $G=(V,E)$ besteht aus

- einer Menge V von Knoten
- einer (Multi-)menge E von Kanten, die Paaren von Knoten entsprechen.

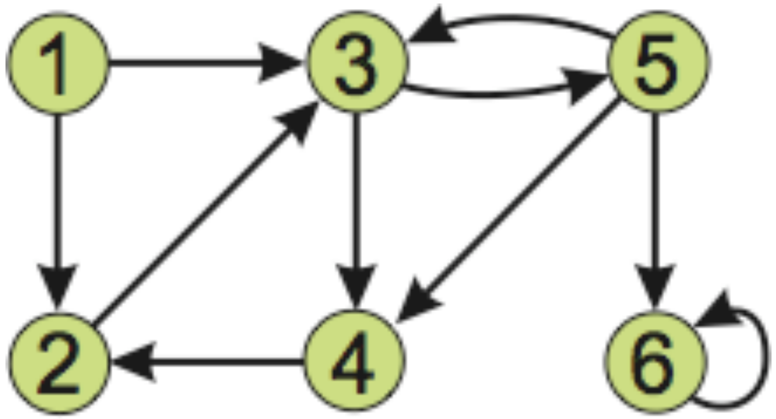
- Bei Multimenge kann ein Paar (v,w) mehrfach in E vorkommen $\rightarrow$ Mehrfachkanten
- Eine Kante (v,v) heißt Schleife (self-loop)

- Annahmen:
- V und E sind endliche Mengen
- Mehrfachkanten erlaubt

Gerichtete Graphen

- Sind die Paare in E geordnet: $E \subseteq V \times V \rightarrow$ gerichteter Graph (Digraph)
- Kanten heißen dann: gerichtete Kanten (Bögen, directed edges, arcs)

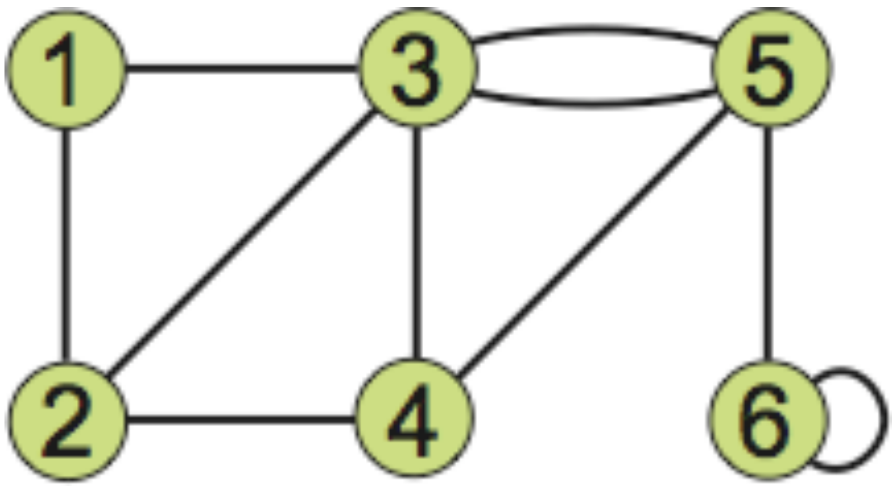
- Maximale Kantenanzahl eines Digraphen ohne Schleifen und Mehrfachkanten: $|E| \leq$



Ungerichtete Graphen

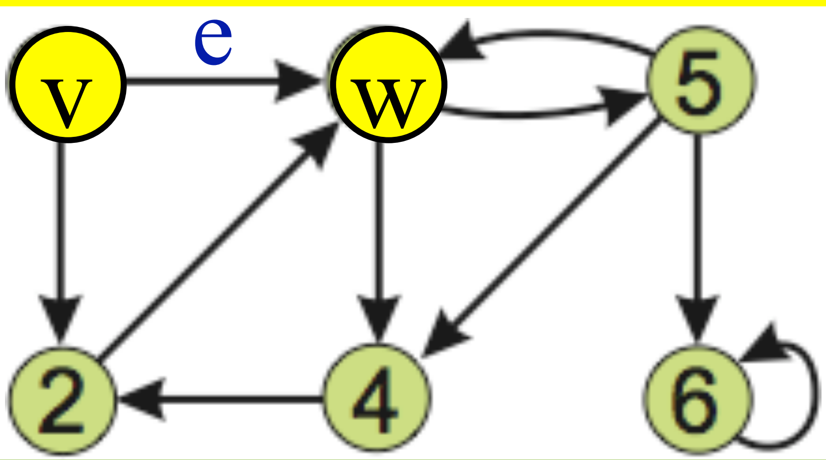
- Sind die Paare in E ungeordnet $\rightarrow$ (ungerichteter) Graph
- Kanten heißen dann: Kanten (edges)

- Maximale Kantenanzahl ohne Schleifen und Mehrfachkanten: $|\mathrm{E}| \leq$



Definitionen (Nachbarn)

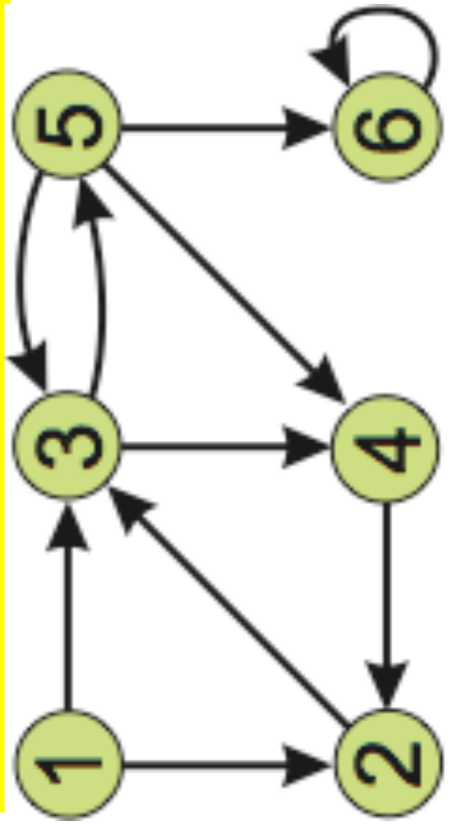
- Sei **e=(v,w)** eine Kante in E, dann sagen wir:
- v und w sind adjazent
- v (bzw. w) und e sind inzident
- v und w sind Endpunkte von e
- v und w sind Nachbarn
- e ist eine ausgehende Kante von v und eine eingehende Kante von w (falls G Digraph)



Definitionen für gerichtete Graphen G=(V,A)

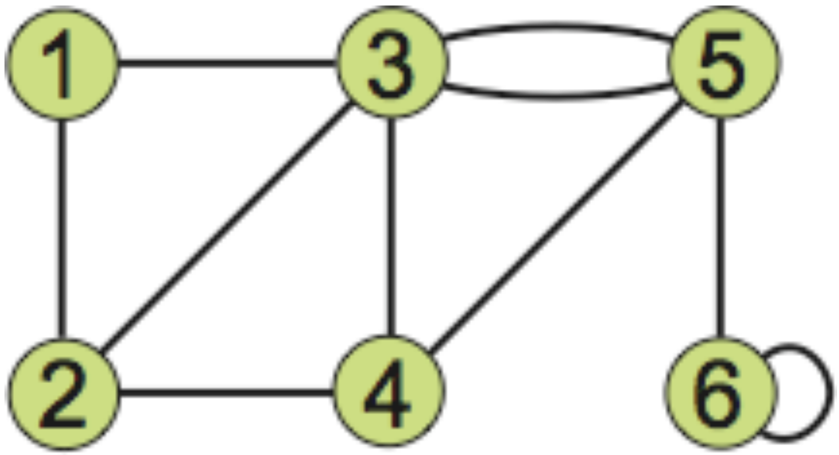
- Eingehende Nachbarmenge von $v \in V$: $N^+(v) := \{u \in V \mid (u,v) \in A\}$
- Ausgehende Nachbarmenge von $v \in V$: $N^-(v) := \{w \in V \mid (v,w) \in A\}$
- $A^+(v)$:=Menge der eingehenden Kanten von v
- $A^-(v)$:=Menge der ausgehenden Kanten von v
- $A(v) := A^+(v) \cup A^-(v)$
- Eingangsgrad $d^+(v) := |A^+(v)|$
- Ausgangsgrad $d^-(v) := |A^-(v)|$
- Knotengrad $d(v) := d^+(v) + d^-(v)$

$N^+(5)=\{3\}$
$N^-(5)=\{3,4,6\}$
$d^+(5)=1$
$d^-(5)=3$



Definitionen für ungerichtete Graphen $G=(V,E)$

- Nachbarmenge von $v \in V$:
  $N(v) := \{w \in V \mid (v,w) \in E\}$
- Menge der zu v inzidenten Kanten
  $E(v) := \{(u,v) \mid (u,v) \in E\}$
- Knotengrad $d(v)$ ist die Anzahl der zu v inzidenten Kanten, wobei eine Schleife 2 Mal gezählt wird



$N(5)=\{3,4,6\}$

$d(5)=4$

$d(6)=3$

Lemma (gerade Knotengrade)

- In einem ungerichteten Graphen $G=(V,E)$ ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Knotengrad gerade.

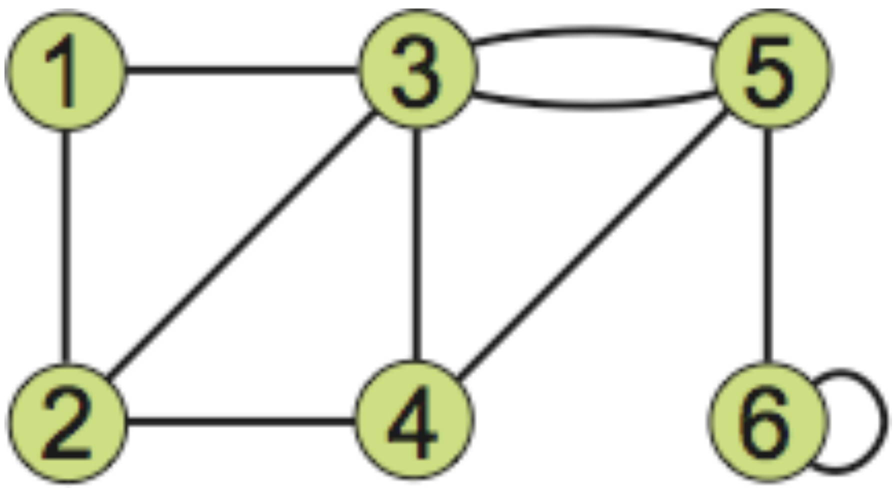
- Summiert man über alle Knotengrade, so zählt man jede Kante genau zweimal:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\,|E|$$

L.S.: gerade

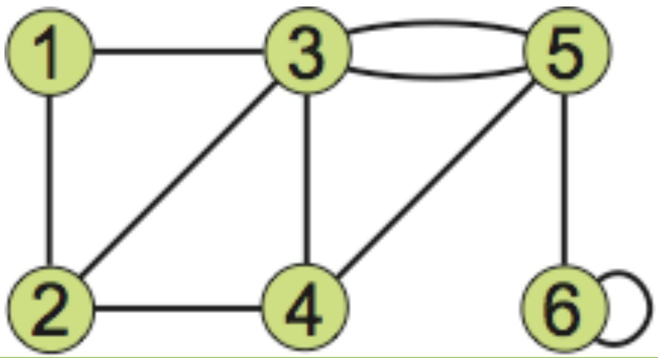
R.S.: gerade

also auch die Anzahl der ungeraden Summanden



Definitionen (Wege)

- Sei $G=(V,E)$ gerichtet oder ungerichtet:
- Ein Kantenzug (walk) der Länge k ist eine nicht-leere Folge $v_0,e_1,v_1,e_2,\ldots, e_k,v_k$ von abwechselnd Knoten und Kanten aus G mit $e_i=(v_{i-1},v_i)$ für $i=1,\ldots,k$.
- Man schreibt auch: $v_0,v_1,\ldots, v_k$
- Ein Weg (path) ist ein Kantenzug in dem alle Knoten verschieden sind.



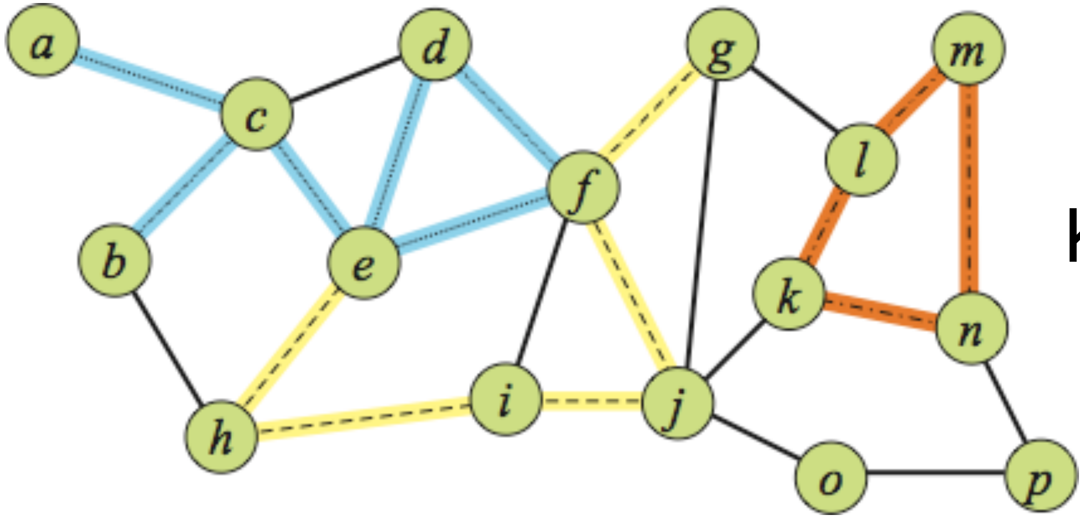
Kantenzug: 1,3,2,4,3,5

Weg: 1,3,2,4,5

Definitionen (Kreis)

- Sei $G=(V,E)$ gerichtet oder ungerichtet:
- Ist $v_0,e_1,v_1,e_2,\ldots, e_{k-1},v_{k-1}$ ein Weg mit $k \geqq 3$ und $e_k=(v_{k-1},v_0)$ eine Kante aus G, dann ist

  $v_0,e_1,v_1,e_2,\ldots,e_{k-1},v_{k-1},e_k,v_0$ ein Kreis der Länge k in G.



Kantenzug: a,c,e,f,d,e,c,b

Weg: g,f,j,i,h,e

Kreis: k,l,m,n,k

Darstellung von Graphen im Rechner: Statische Graphen

- Im Folgenden sei $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$

- 1. Möglichkeit: Adjazenzlisten

- **Idee:** Speichere für jeden Knoten seine Nachbarmenge in einer Liste

- Realisierung: z.B. Knoten in Array und Nachbarkanten jedes Knotens als einfach verkettete Liste

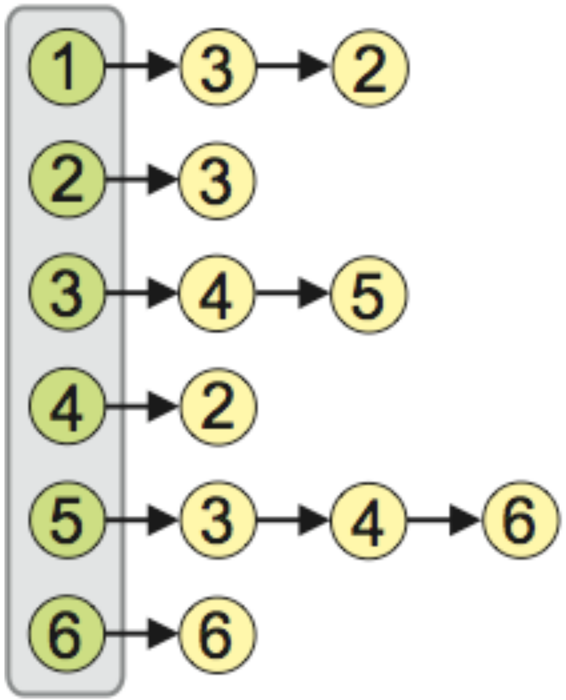
Darstellung von Graphen im Rechner: Statische Graphen

- 2. Möglichkeit: Adjazenzmatrix

- **Idee:** Eine $V \times V$ Matrix enthält 0/1-Einträge für jedes Knotenpaar $\{u,v\}$

- Realisierung:
- Sei $M=(m_{i,j})$ eine n x n Matrix mit $m_{ij}:=1$ falls $(v_i,v_j)\in E$, und $m_{ij}:=0$ sonst.
- bei Mehrfachkanten schreibe statt 1 die Anzahl der Kanten

Darstellung gerichteter Graphen

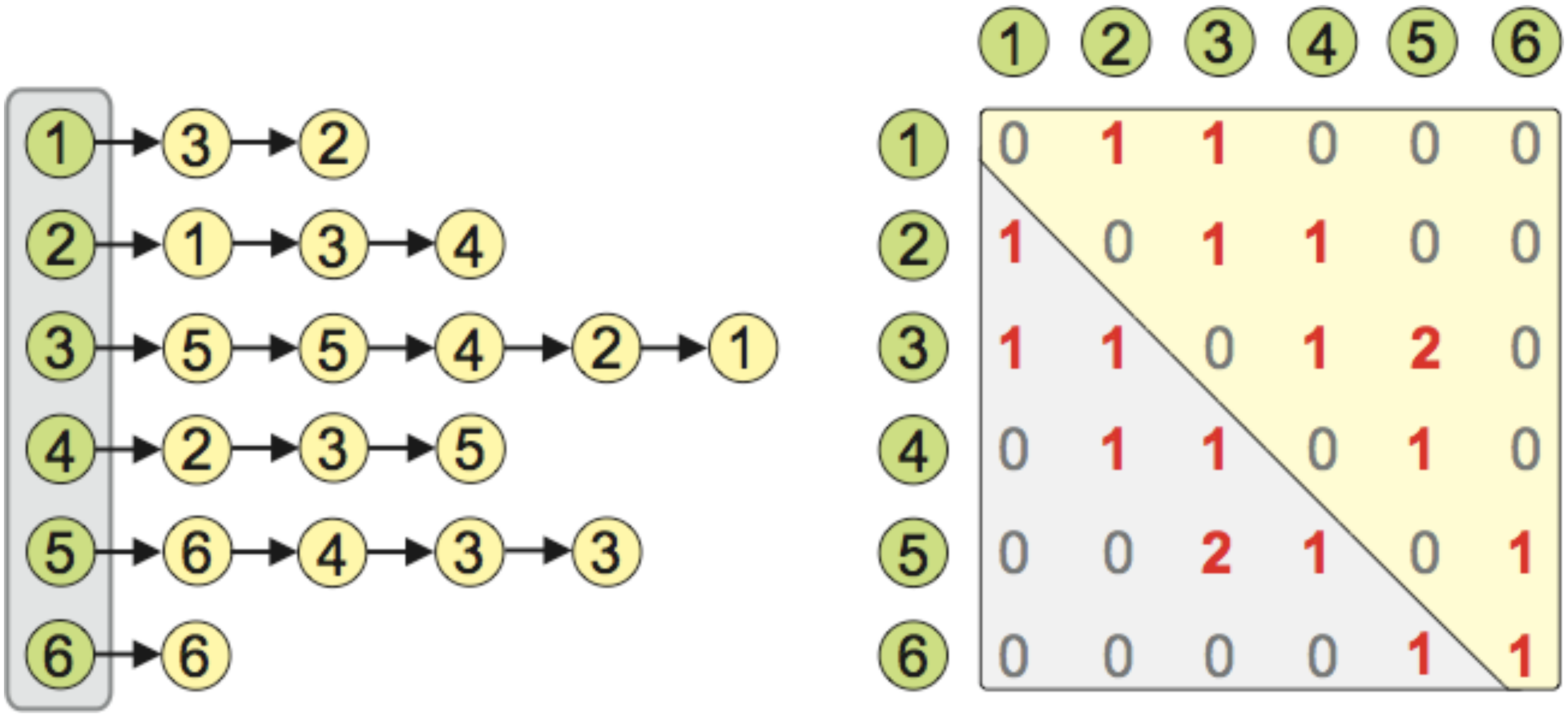


Adjazenzlisten

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	1	1	0	1
6	0	0	0	0	0	1

Adjazenzmatrix

Darstellung ungerichteter Graphen



Adjazenzlisten

Adjazenzmatrix

ist symmetrisch: nur Speicherung der oberen Hälfte

Diskussion

HIER: ab jetzt Adjazenzlisten

für **dünne** Graphen vorzuziehen!

Adjazenzliste:

- Speicherplatzverbrauch: linear: $\Theta(|V|+|E|)$
- Zeit für Aufbau: linear: Θ
- Abfrage, ob Kante (u,v) existiert: Θ
- Iteration über alle Nachbarn von $v\in V$: Θ

Adjazenzmatrix:

- Speicherverbrauch immer quadratisch:
- Zeit für Aufbau: immer quadratisch: Θ
- Abfrage, ob Kante (u,v) existiert: Θ
- Iteration über alle Nachbarn von $v\in V$: Θ

Definitionen

- Die Dichte (density) eines Graphen G ist das Verhältnis $|E| / |V|$.
- G heißt dünn, falls seine Dichte $O(1)$ ist
- G heißt dicht, falls seine Dichte $\Omega(|V|)$ ist.

Darstellung von Graphen im Rechner: Dynamische Graphen

- Dynamisch unter den Operationen:
  - Hinzufügen neuer Knoten und Kanten
  - Entfernen von Knoten und Kanten

- **Idee:** für gerichtete Graphen:
- Inzidenzlisten: speichere ein- und ausgehende Knoten bei v
- Knoten in doppelt verketteter Liste (damit Entfernen in konstanter Zeit)
- Inzidenzlisten in doppelt verketteten Listen

Realisierung Dynamische Graphen: Liste für die Knoten

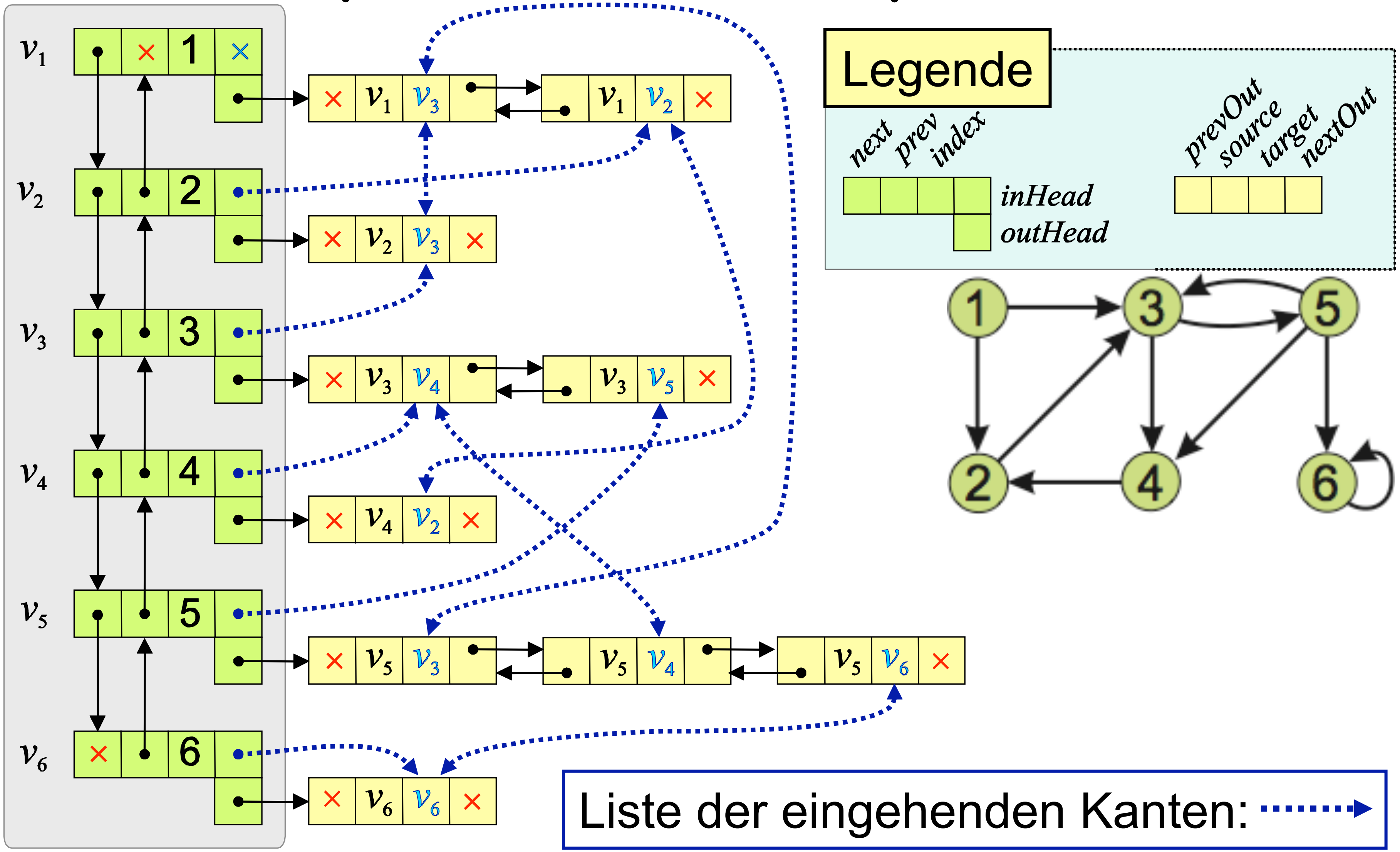
```
struct Node
   var Node prev          // Vorgänger Knotenliste
   var Node next          // Nachfolger in Knotenliste
   var Edge outHead       // Listenanfang ausgeh. Kanten
   var Edge inHead        // Listenanfang eingeh. Kanten
   var int index          // fortlaufender Index
end struct
```

Realisierung Dynamische Graphen: Liste für die Kanten

```
struct Edge
   var Edge prevOut   //Vorgänger in Liste ausg. Kanten
   var Edge nextOut   //Nachfolger in Liste ausg. Kanten
   var Edge prevIn    // Vorgänger in Liste eing. Kanten
   var Edge nextIn    // Nachfolger in Liste eing. Kanten
   var node source    // Anfangsknoten der Kante
   var node target    // Endknoten der Kante
end struct
```

Achtung: jeder Kanteneintrag ist genau einmal in Liste enthalten

Darstellung von Graphen im Rechner: Dynamische Graphen

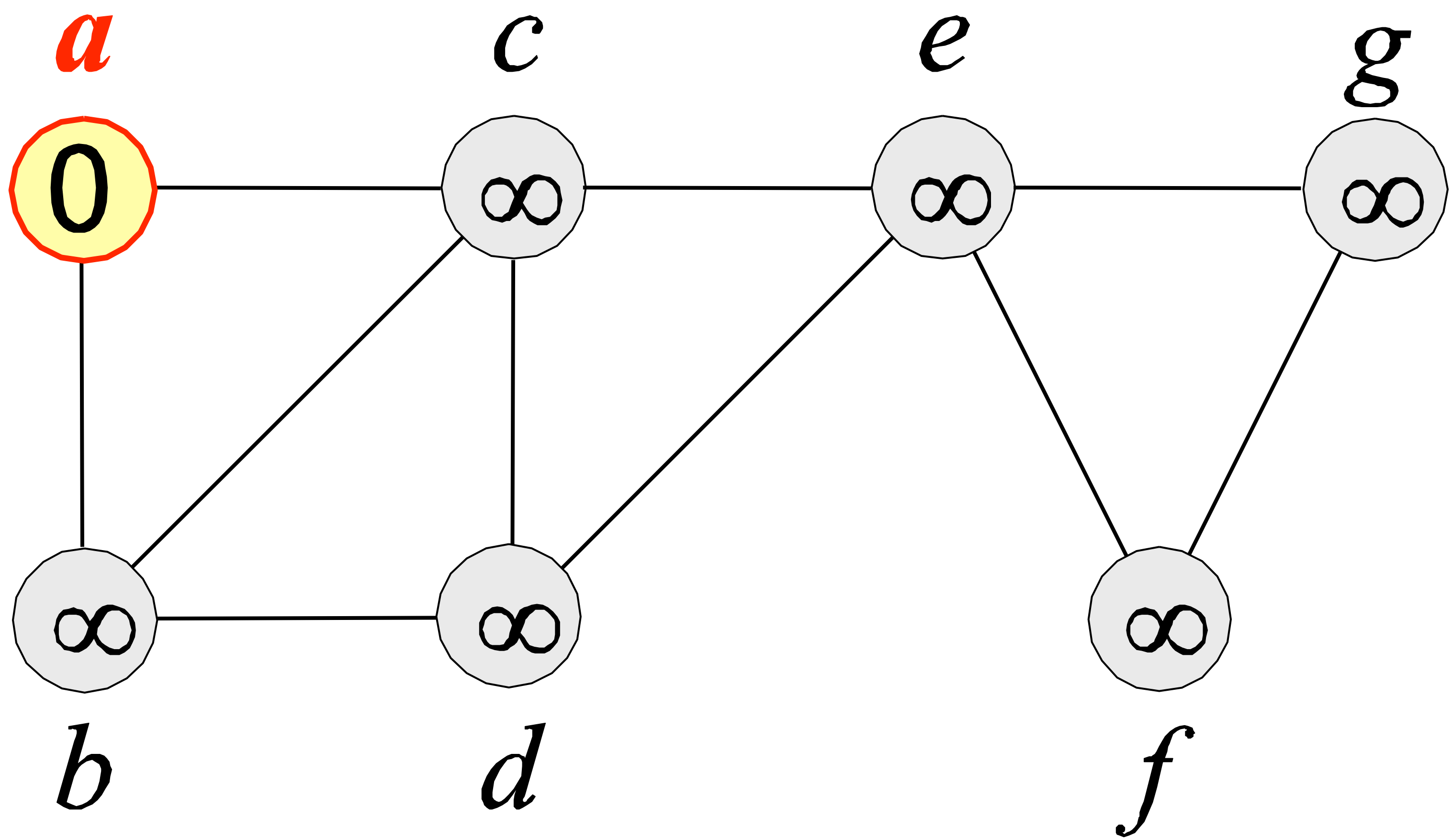


Analyse Dynamischer Graphen

- Speicherplatzverbrauch: linear: Θ
- Zeit für Aufbau: linear: Θ
- Abfrage, ob Kante (u,v) existiert: Θ
- Iteration über alle Nachbarn von $v \in V$: Θ
- Iteration über alle ausg. Kanten von $v \in V$: Θ
- Iteration über alle eing. Kanten von $v \in V$: Θ
- Einfügen eines Knotens bzw. Kante: Θ
- Entfernen einer Kante: Θ
- Entfernen eines Knotens: Θ

Man geht davon aus, dass man jeweils Zeiger auf die Knoten und beim Entfernen auch auf die Kanten gegeben hat

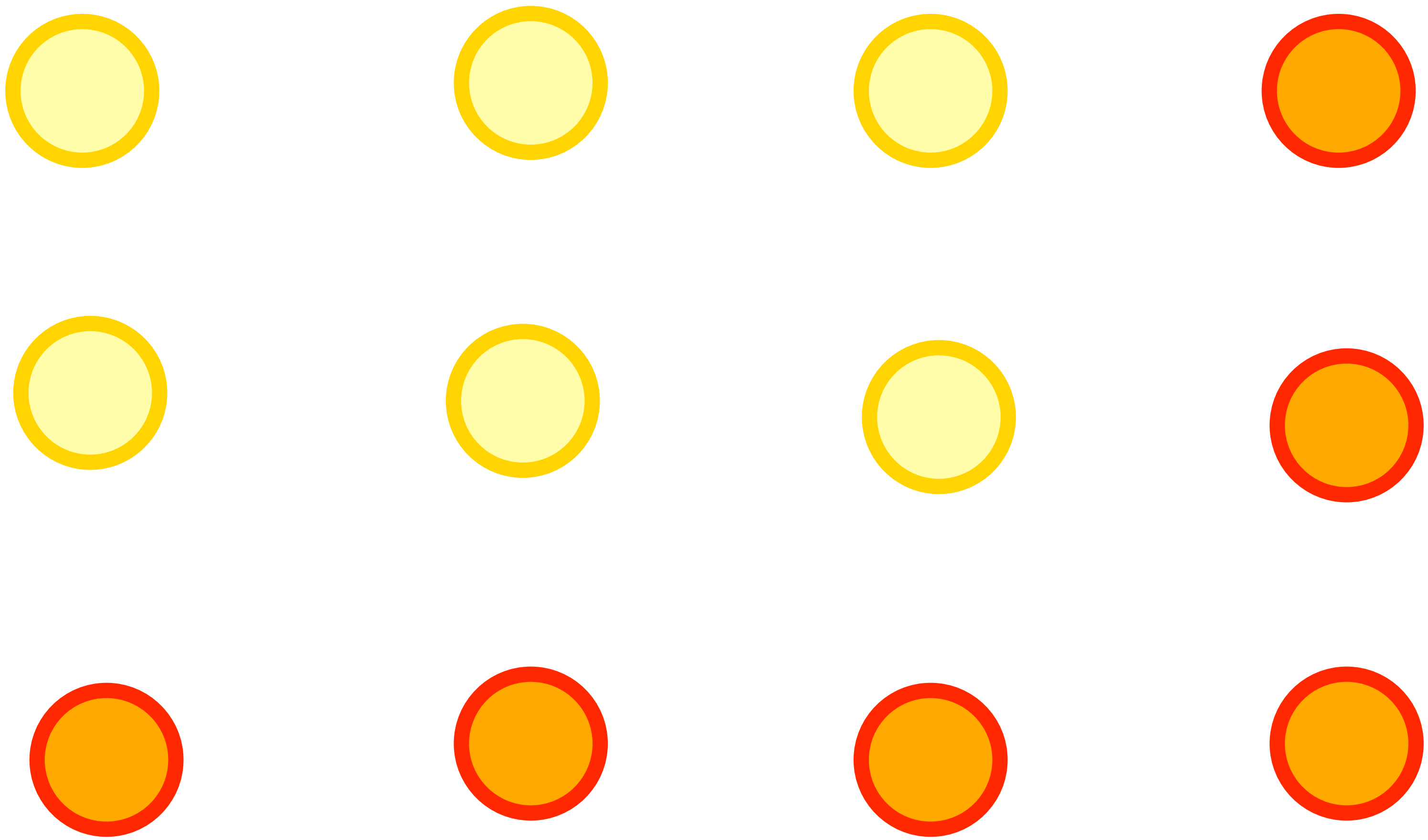
Zum Ausschneiden und Üben:



Q

a ***b*** ***c***

d ***e*** ***f*** ***g***



Q: