Kap. 4.4: B-Bäume
Kap. 4.5: Dictionaries in der Praxis

Professor Dr. Petra Mutzel

Lehrstuhl für Algorithm Engineering, LS11

Fakultät für Informatik, TU Dortmund

13./14. VO DAP2 SS 2009 2./4. Juni 2009

2. Übungstest

- **Termin:** Di **16. Juni** 2009 im AudiMax, Beginn: 12:15 Uhr (bitte um 12:00 Uhr anwesend sein)
- **Dauer:** 30 Minuten
- **Stoff:** aus VO-Folien, Skript und Übungen bis inkl. B-Bäume (schwerpunktmäßig ab Heap-Sort inkl.)

- Dann ab ca. 12:50 Uhr: Vorlesung bis 13:45 Uhr

Motivation

„Warum soll ich heute hier bleiben?“

Mal ganz andere Suchbäume

„Was ist daran Besonderes?“

praxis-relevant für Datenbanken

Überblick

- Einführung von B-Bäumen
- Eigenschaften von B-Bäumen
- Realisierung und Analyse
- Varianten von B-Bäumen

B-Bäume

- Einführung von Rudolf Bayer und Eduard M. McCreight 1972
- Datenstruktur zur Verwaltung von Indizes für das relationale Datenmodell von Edgar F. Codd 1972
- → Entwicklung des ersten SQL-Datenbanksystems System R bei IBM

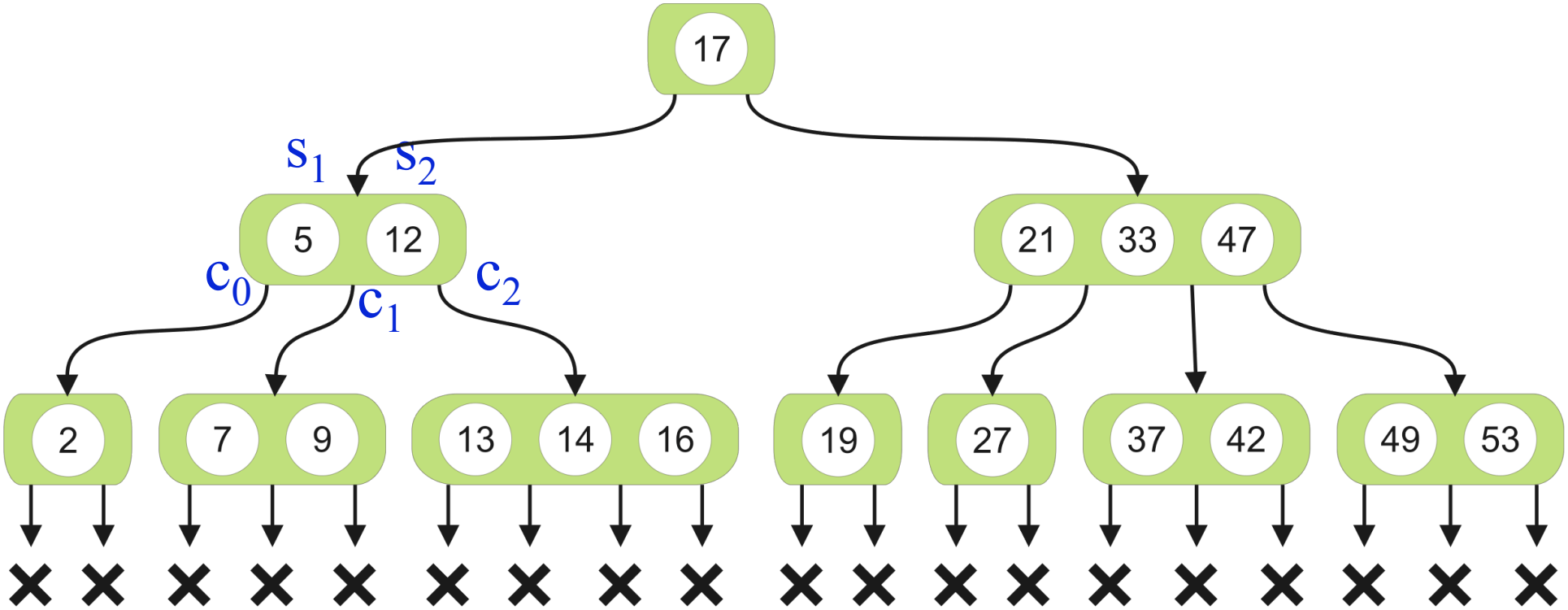
- B-Bäume sind ausgeglichene Mehrwegbäume
- **Idee:** jeder Knoten eines B-Baums der Ordnung m besitzt zwischen $\lceil m/2 \rceil$ und m Kinder.

Motivation für B-Bäume

- Minimierung von externen Speicherzugriffen (Festplatten)
- Man wählt i.A. die Ordnung m gerade so gross, dass jeweils alle Schlüssel eines B-Knotens genau einer *page* (Blockgröße bei einem Lesezugriff) entsprechen
- typische Größen, z.B. $m=100$ oder $m=5000$
- Beispiel:
  - 1 Mio. Datensätze, $m=100$: Höhe eines B-Baumes: 2
  - also nur 2 Speicherzugriffe (bei Wurzel im Hauptspeicher)
  - im Vergleich hierzu Binärbäume: Höhe: 20

B-Bäume

- Ein Knoten mit k+1 Zeigern $c_0,c_1,\ldots,c_k$ auf die Unterbäume besitzt k Schlüssel $s_1,\ldots,s_k$
- Diese sind in sortierter Reihenfolge gespeichert und trennen die jeweiligen Unterbäume.



Definition B-Bäume

- Ein **B-Baum der Ordnung $m>2$** ist ein Baum mit folgenden Eigenschaften (1)-(6):

(1) Kein Schlüsselwert kommt mehrfach vor

(2) Für jeden Knoten α mit $k+1$ Zeigern $c_0,c_1,\ldots,c_k$ auf Unterbäume gilt:

   a) α hat k Schlüssel $s_1,\ldots,s_k$, wobei gilt: $s_1<\ldots<s_k$

   b) Für jeden Schlüssel s im Teilbaum mit Wurzel c_i gilt: $s_i < s < s_{i+1}$, wobei $s_0=-\infty$ und $s_{k+1}=+\infty$

   c) Ein Schlüssel s_i wird als Trennschlüssel der Teilbäume mit Wurzel c_{i-1} und c_i bezeichnet.

➔ jeder Schlüssel entweder in Blatt oder Trennschlüssel

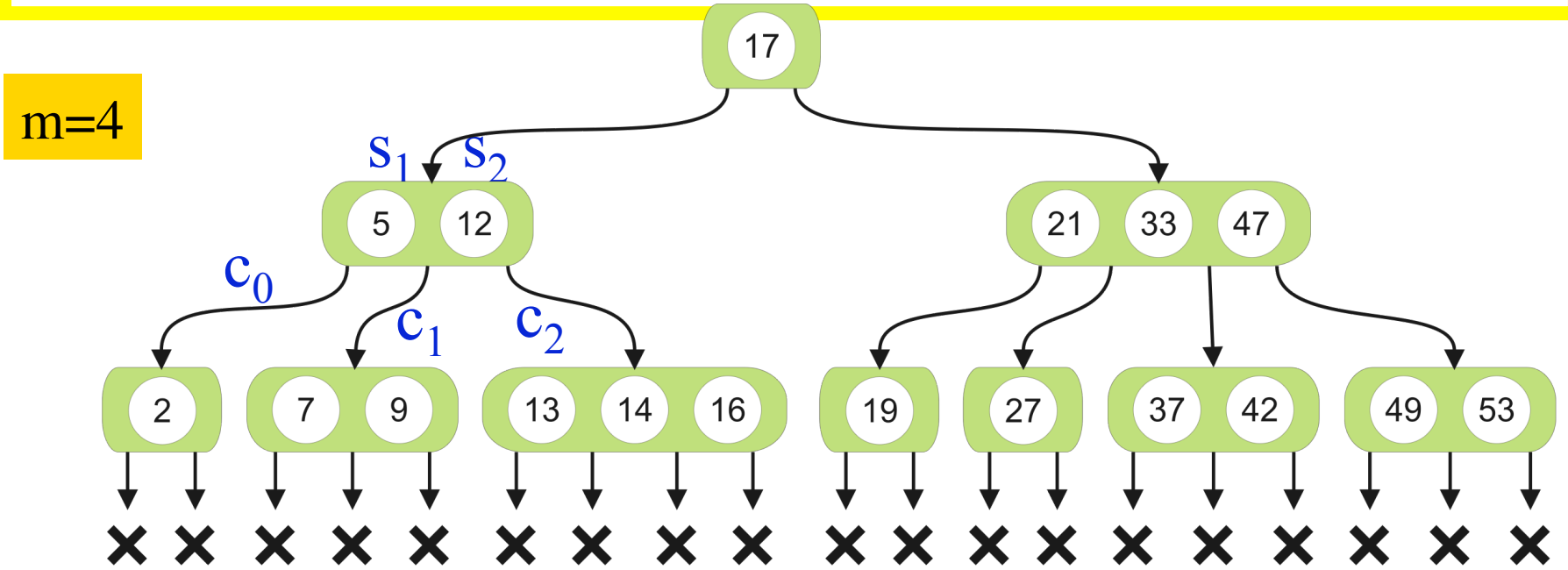
Definition B-Bäume ff

(3) Der Baum ist leer, oder die Wurzel hat mindestens 2 Zeiger auf Kinder.

(4) Jeder Knoten mit Ausnahme der Wurzel enthält mindestens $\lceil m/2 \rceil$ Zeiger.

(5) Jeder Knoten hat höchstens m Zeiger.

(6) Alle Blätter haben die gleiche Tiefe.



Existenz von B-Bäumen

Theorem: Für jede beliebige Menge von Schlüsseln und jedes beliebige $m>2$ existiert ein gültiger B-Baum der Ordnung m.

Beweisidee: Besteht die Schlüsselmenge aus weniger als m Schlüsseln, dann besteht der B-Baum einfach aus einem einzigen Wurzelknoten, der alle Schlüssel enthält.

Sonst: benutze folgendes Lemma.

Beweisidee der Existenz von B-Bäumen

Lemma: Gegeben sei eine Menge M aus n Schlüsseln und $m \geq 3$ mit $n \geq m$. Wir setzen $l := \lfloor n/m \rfloor$.

Wir können l Trennschlüssel aus M so auswählen, dass die übrigen Schlüssel in $l+1$ Teilmengen $S_0, \ldots, S_l$ zerfallen, die jeweils eine gültige Befüllung eines Knotens in einem B-Baum der Ordnung m darstellen.

$n=33$
$m=4$
$l=8$

Durchschnittliche Größe einer Teilmenge: $(n+1)/(l+1)-1$

Weiter mit Beweis zu Theorem: Diese $l+1$ Teilmengen S_i bilden die Blätter unseres B-Baums. Wiederhole diese Aufteilung rekursiv für die Trennschlüssel.

Größe von B-Bäumen

Lemma: Die Größe eines B-Baums ist linear in n, der Anzahl der Schlüssel.

Beweis:

- Jeder Schlüssel kommt im Baum vor, deshalb: Größe ist in $\Omega(n)$.
- Sei t die Anzahl der Knoten im Baum. Da jeder Knoten mindestens einen Schlüssel enthält, gilt $t=O(n)$.
- Da in jedem Knoten mit k Schlüsseln gilt, dass er $k+1$ Zeiger enthält, haben wir insgesamt $n+t=O(n)$ viele Zeiger.
- Also gezeigt: $\Omega(n)$ und $O(n)$.

Minimale Höhe von B-Bäumen

Lemma: Die minimale Höhe eines B-Baums mit n Schlüsseln ist $\lceil \log_m(n+1) \rceil - 1$

Beweis: Ein B-Baum hat die kleinste Höhe, wenn alle Knoten m-1 Schlüssel enthalten.

Bei Höhe h des Baums enthält er dann m^h Blätter.

Ein B-Baum mit l+1 Blättern hat l Schlüssel in inneren Knoten.

Insgesamt: $n = m^h(m-1) + (m^h-1) = m^{h+1} - 1$

Schlüssel in Blättern

Schlüssel in inneren Knoten

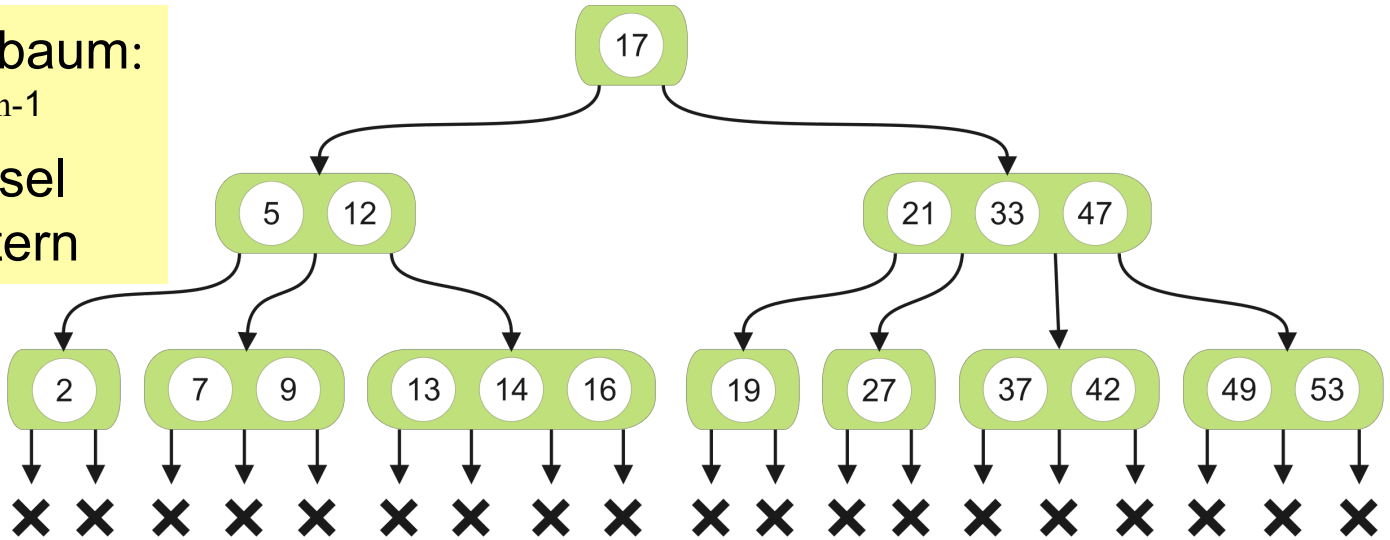
Maximale Höhe von B-Bäumen

Lemma: Die maximale Höhe eines B-Baums mit n Schlüsseln ist $\lfloor \log_{\lceil m/2 \rceil}((n+1)/2) \rfloor$

Beweis: Ein B-Baum hat die größte Höhe, wenn die Wurzel nur einen einzigen Schlüssel enthält und die beiden Teilbäume und deren Teilbäume (rekursiv) jeweils nur $\lceil m/2 \rceil$-1 Schlüssel.

Insgesamt bei Höhe h: $n = 1 + 2(\lceil m/2 \rceil^h - 1) = 2 \lceil m/2 \rceil^h - 1$

linker Teilbaum: $\lceil m/2 \rceil^{h-1}$ Schlüssel in Blättern



Datenstruktur eines B-Baums

struct BTreeNode

int k // Anzahl der Schlüssel

KeyType key[1..k]

DataType data[1..k]

BTreeNode child[0..k]

Interne Repräsentation eines B-Baums:

BTreeNode root

Implementierung von SEARCH(r,s) in B-Bäumen

Im Wesentlichen wie im Binärbaum:

1. Vergleiche s mit allen Schlüsseln in der Wurzel (des Teilbaums)
2. Falls gefunden: STOP!
3. Sonst: Folge dem Zeiger, der sich zwischen den beiden im Wurzelknoten benachbarten Schlüsseln befindet. Gehe zu 1.
4. Ausgabe: nicht gefunden!

SEARCH(p,s)

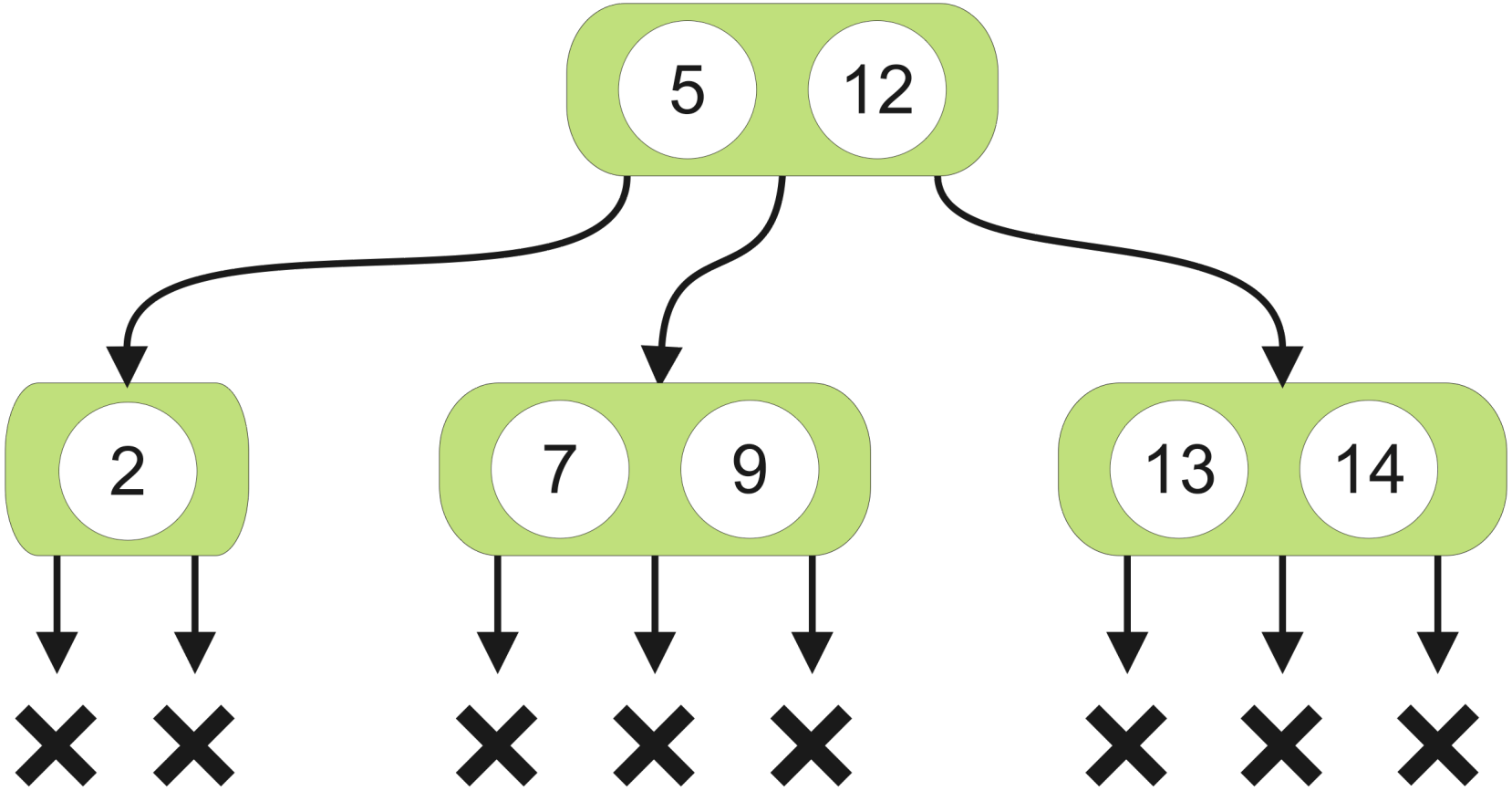
Suche in Baum mit Wurzel p den Schlüssel s

```
(1) If p==NULL then return NULL
(2) else {
(3)       i:=1
(4)       while i≤p.k and s>p.key[i] do
(5)           i:=i+1
(6)       if i≤p.k and s==p.key[i] then
(7)           return p.data[i]
(8)       else return SEARCH(p.child[i-1],s)
(9) }
```

Analyse von SEARCH(r,s)

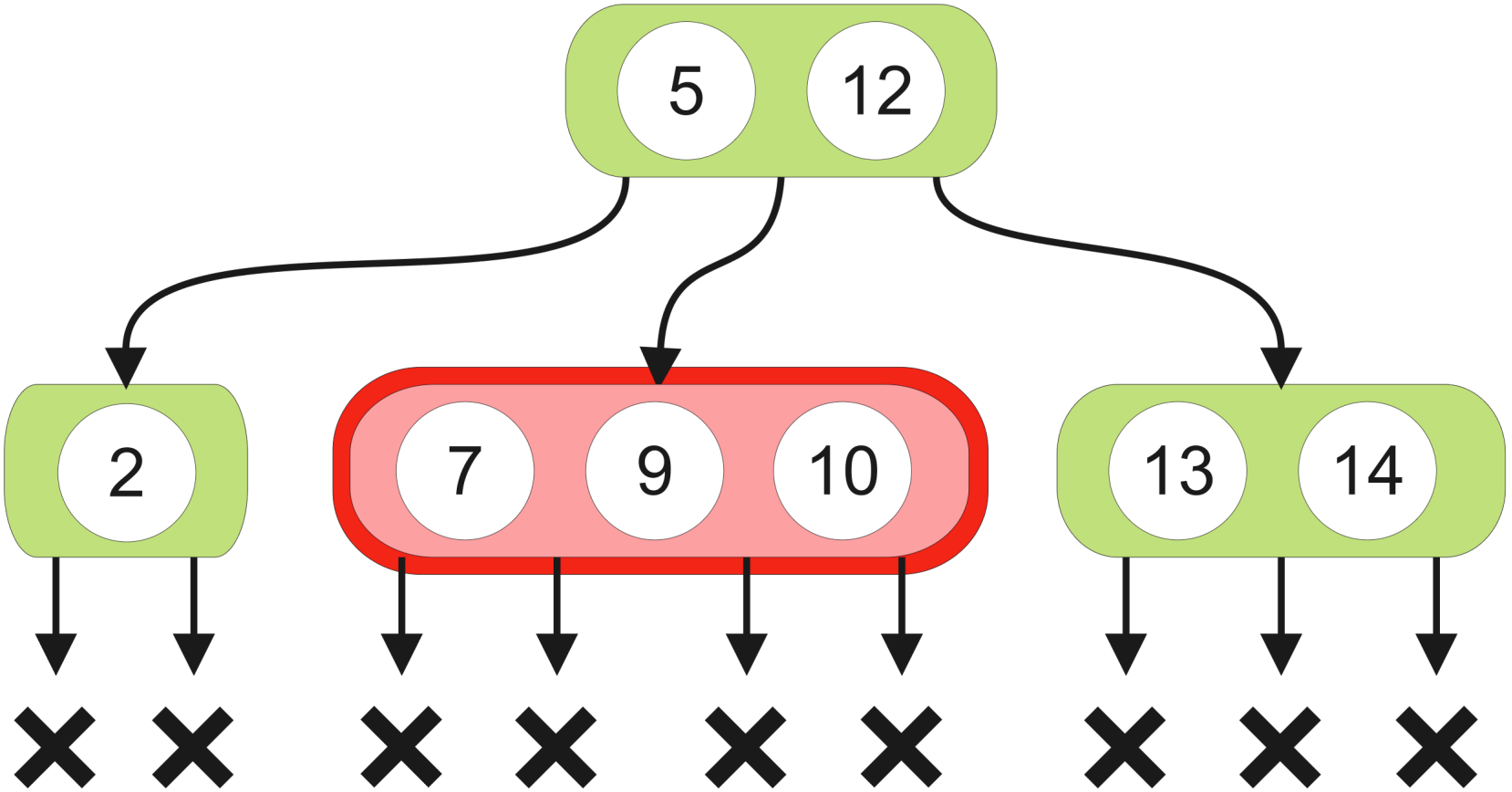
- In Implementierung: lineare Suche
- besser: binäre Suche
- Aber asymptotisch: beide Male Suche innerhalb eines Knotens konstant (wegen m konstant)
- Insgesamt: Laufzeit: O(Höhe von B)

Einfügen eines Schlüssels in einen B-Baum



- Baum vor dem Einfügen von **10, m=3**

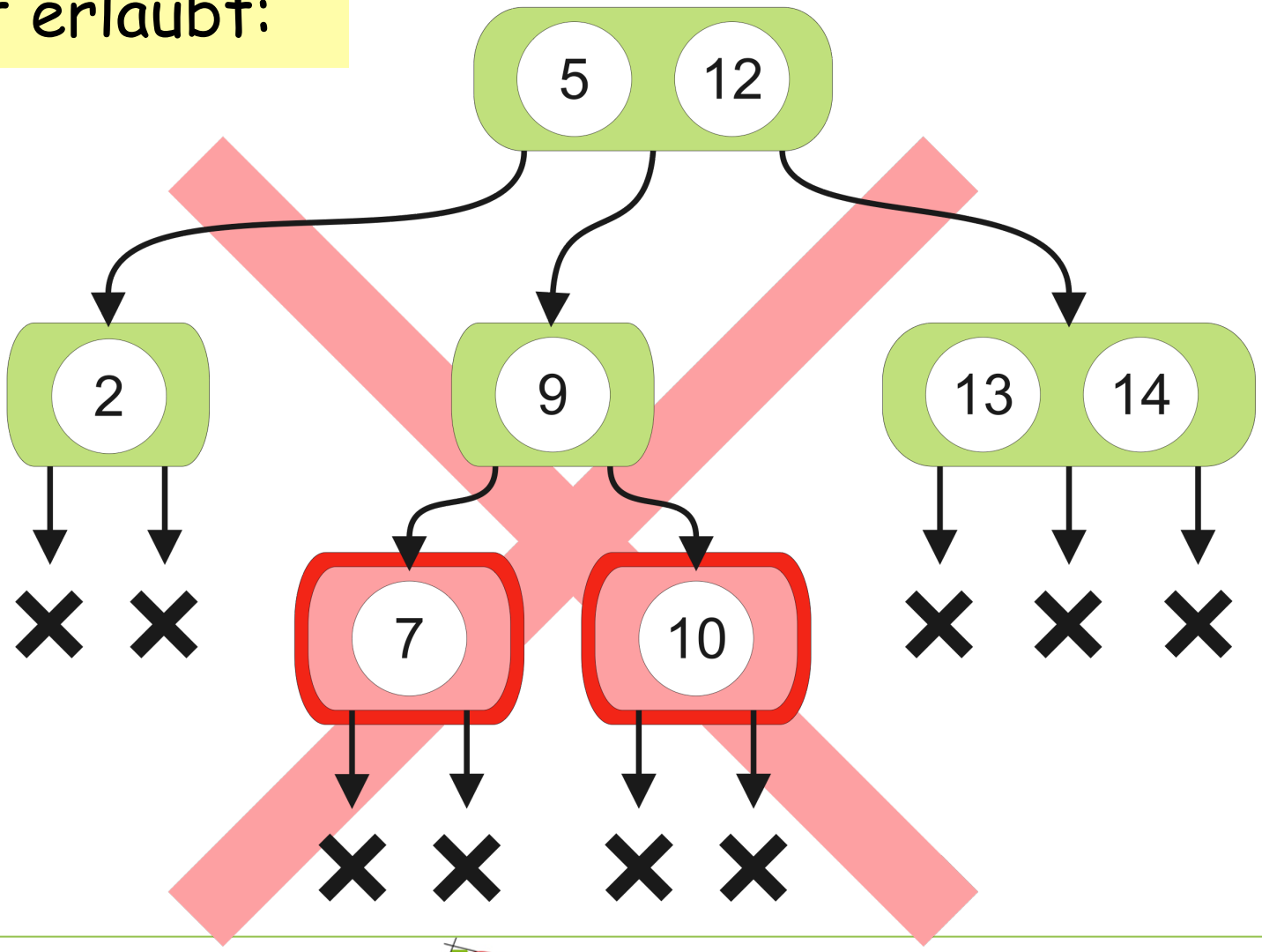
Einfügen in B-Baum



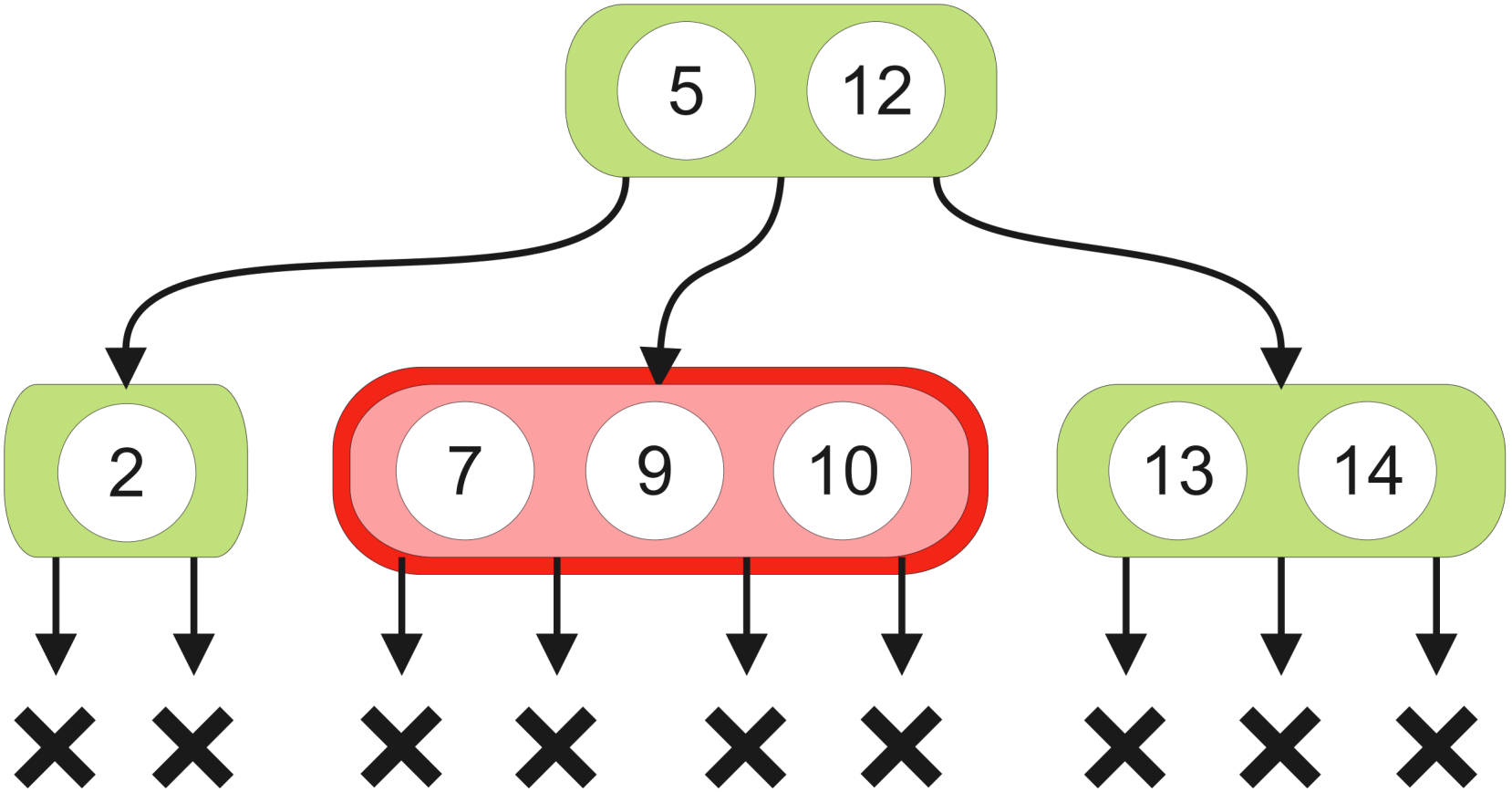
Blatt wird zu groß: hat nun 3 Schlüssel!

Einfügen in B-Baum

nicht erlaubt:



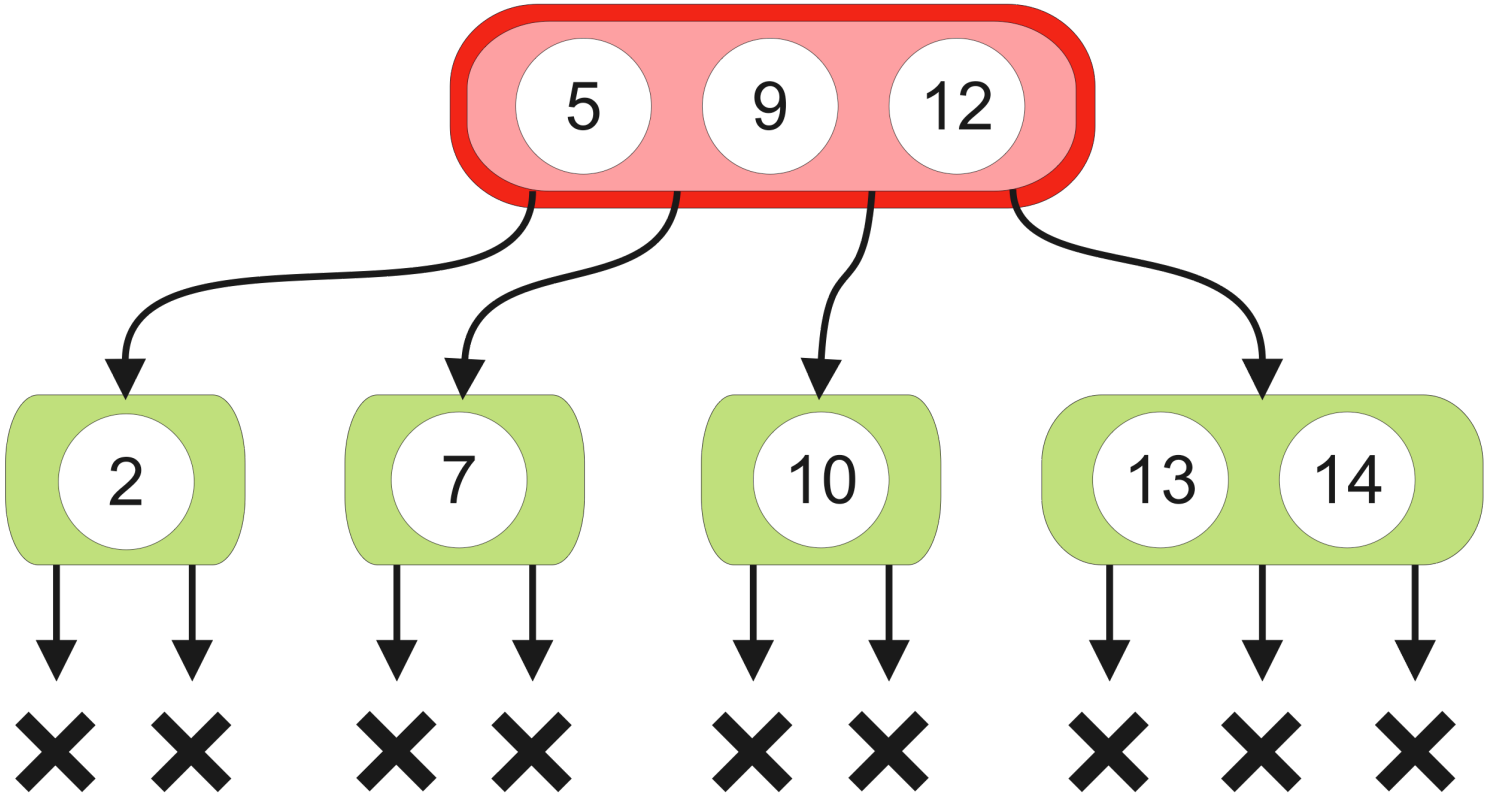
Einfügen in B-Baum



Blatt wird zu groß: hat nun 3 Schlüssel!

Einfügen in B-Baum

Elternknoten wird zu groß:

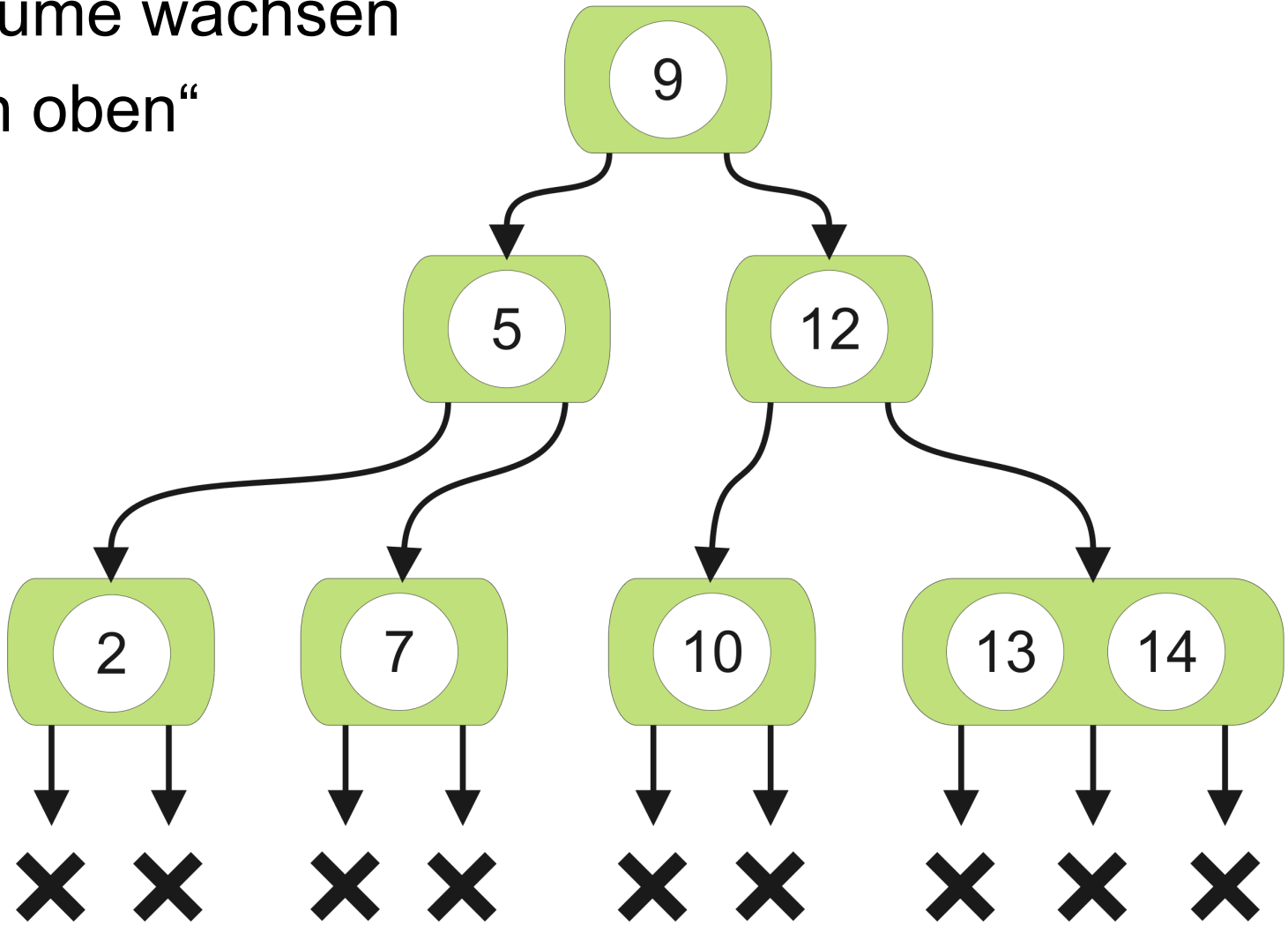


Aufspalten: mittlerer Schlüssel geht in den Elternknoten

Einfügen in B-Baum

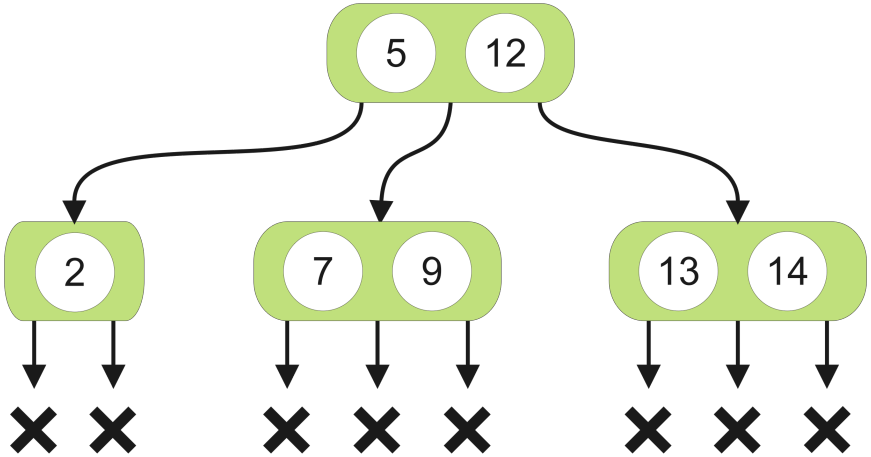
B-Bäume wachsen

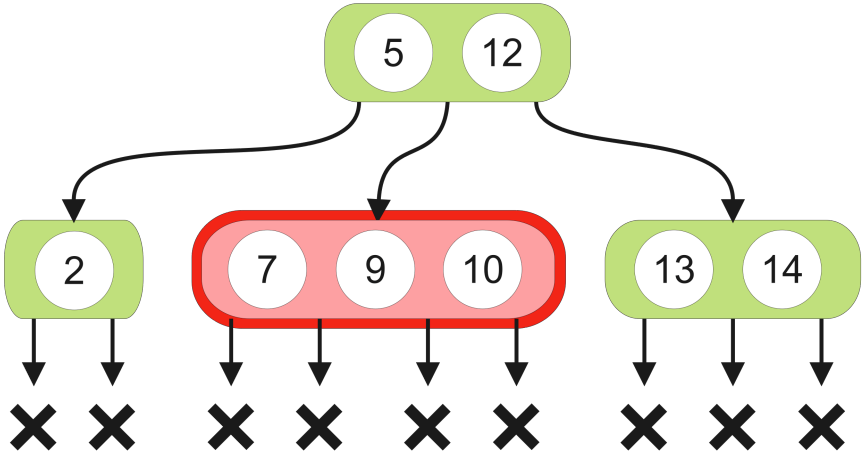
„nach oben“

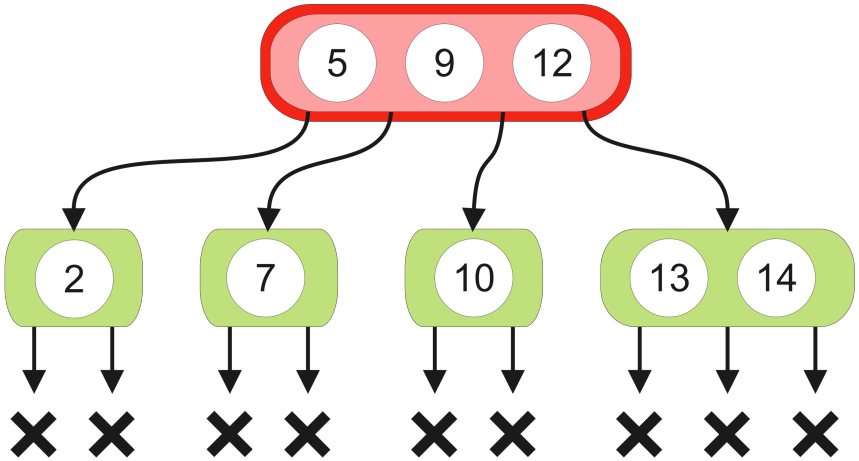


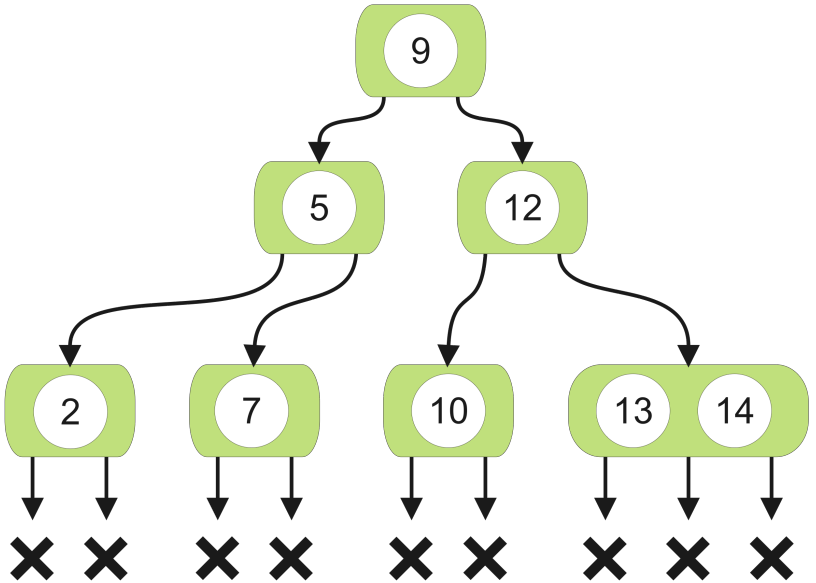
Aufspalten der Wurzel → neue Wurzel

Einfügen von 10









Implementierung von INSERT(r,s) in B-Bäumen

1. Einfügeposition suchen: SEARCH(r,s)
2. Einfügen in Blatt
3. Wiederhole
   - Falls dieser Knoten zu viele Schlüssel enthält, dann **Aufspalten:** der mittlere Schlüssel wird zum Elterknoten verschoben.

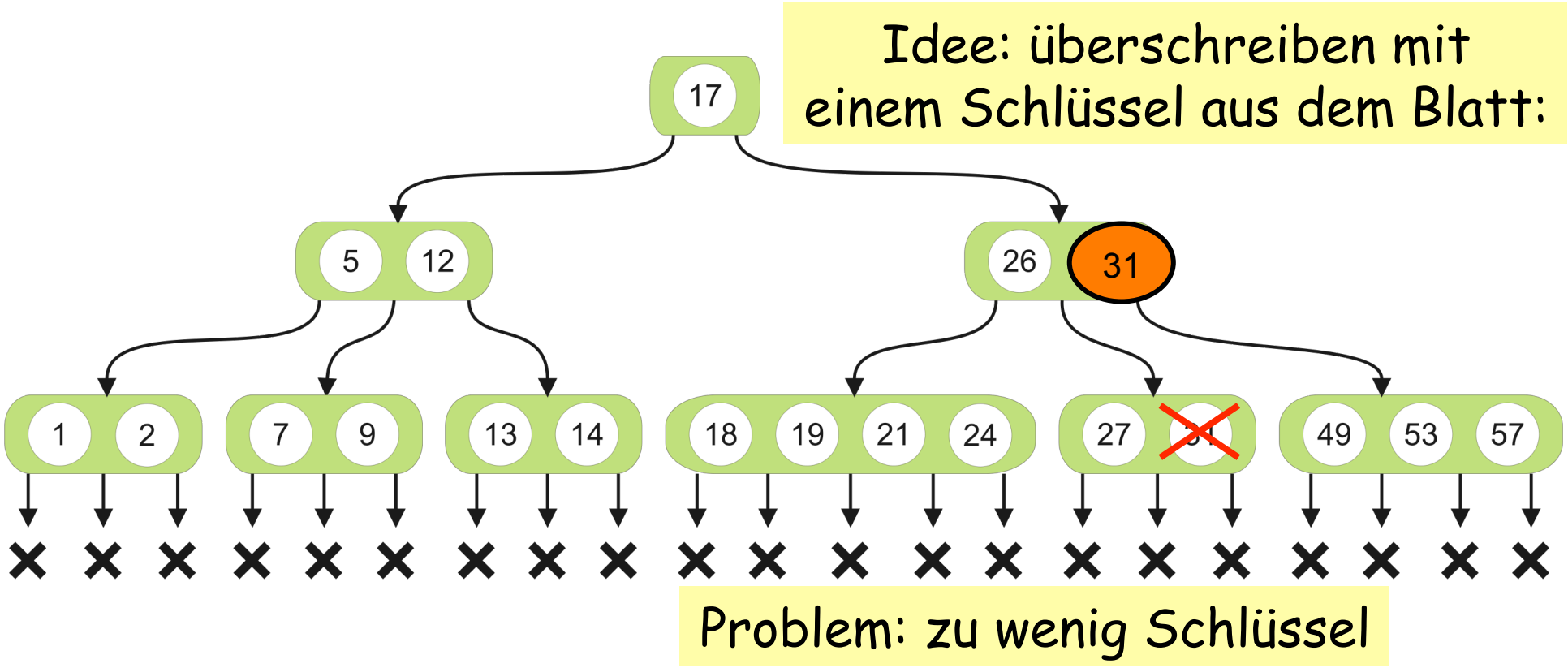
   bis Knoten nicht mehr zu groß.
4. Falls wir die Wurzel aufspalten mußten, setze: neue Wurzel.

Analyse von INSERT(r,s)

Laufzeit: O(Höhe des Baums)=$\Theta(\log n)$

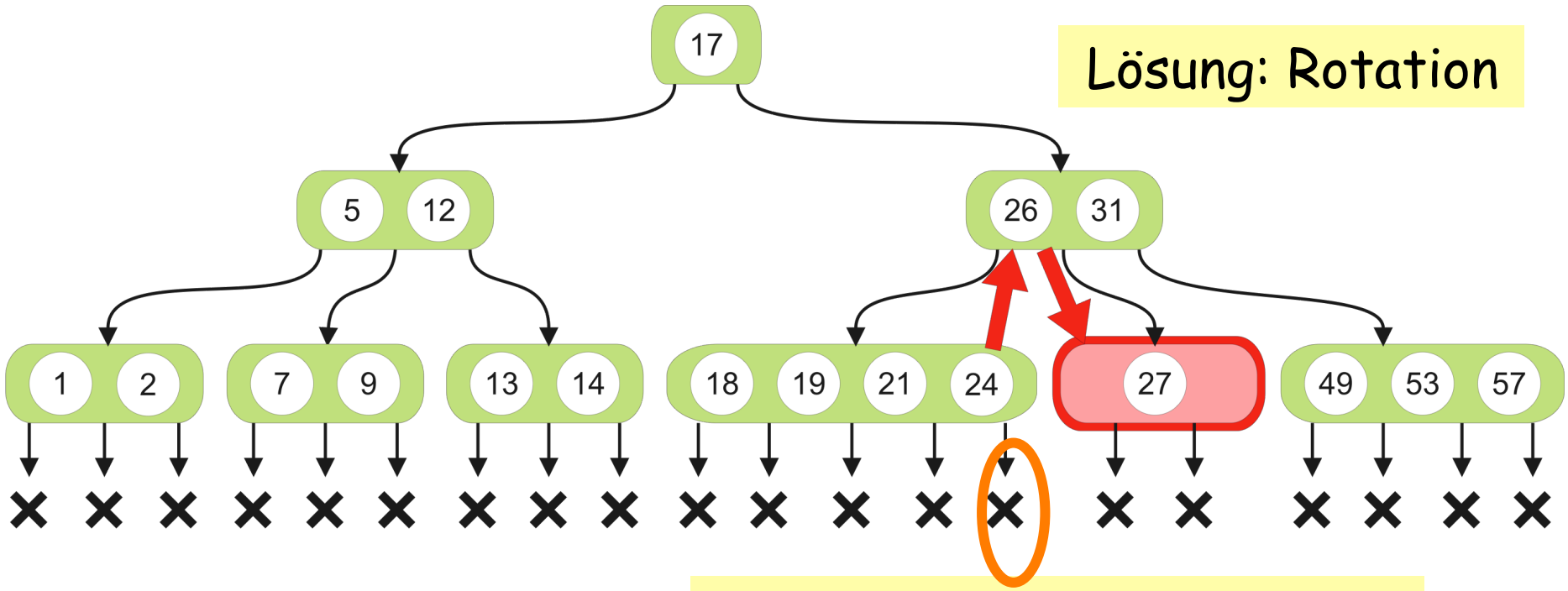
Entfernen in B-Bäumen

- B-Baum der Ordnung 5
- Baum vor dem Entfernen von 33



Entfernen in B-Bäumen

- Entfernen von 33

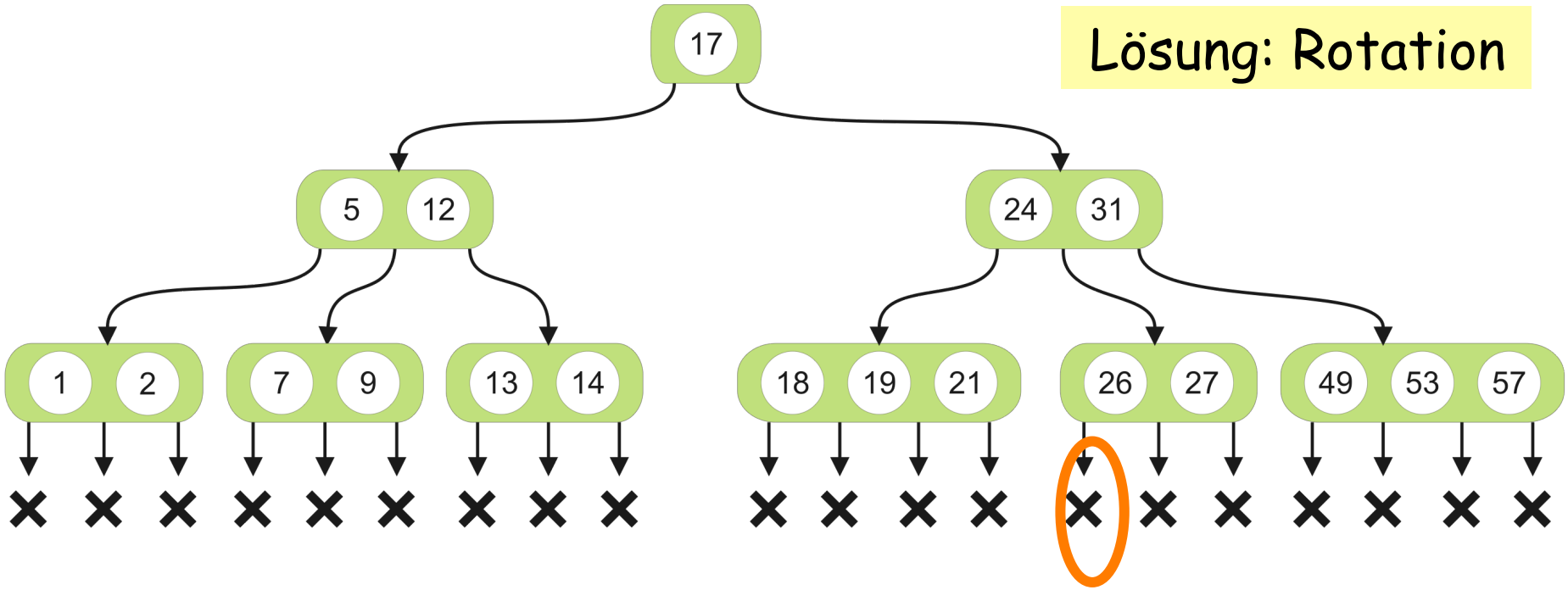


Entfernen in B-Bäumen

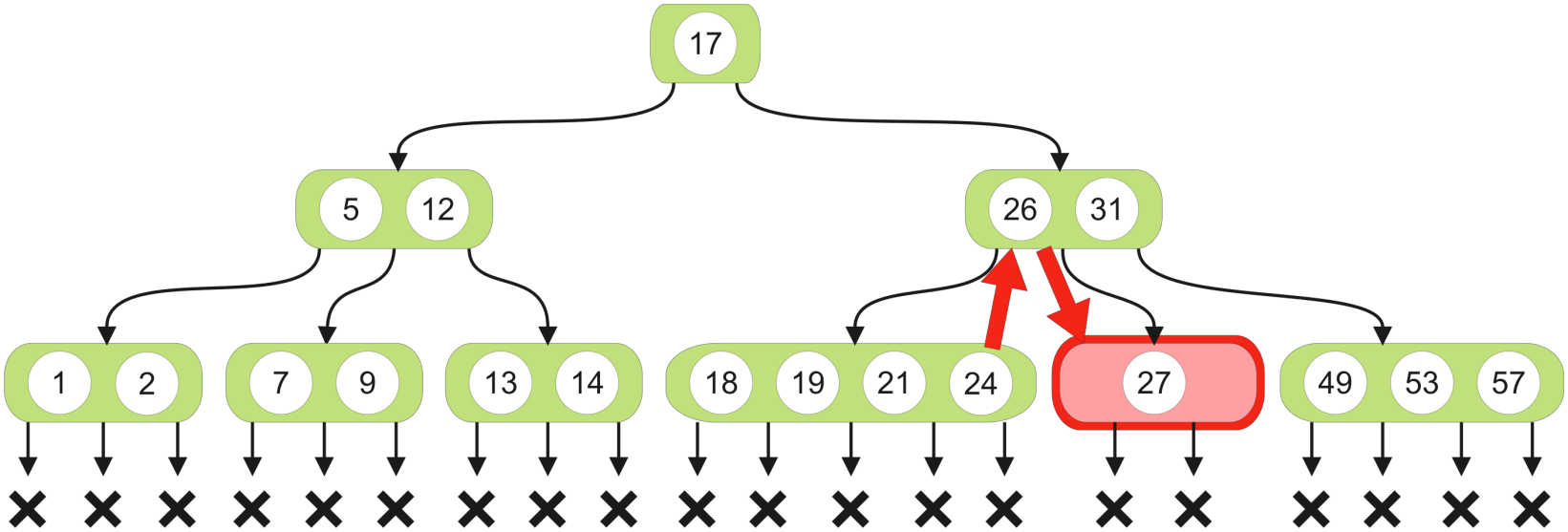
- B-Baum nach der Rotation

Problem: zu wenig Schlüssel

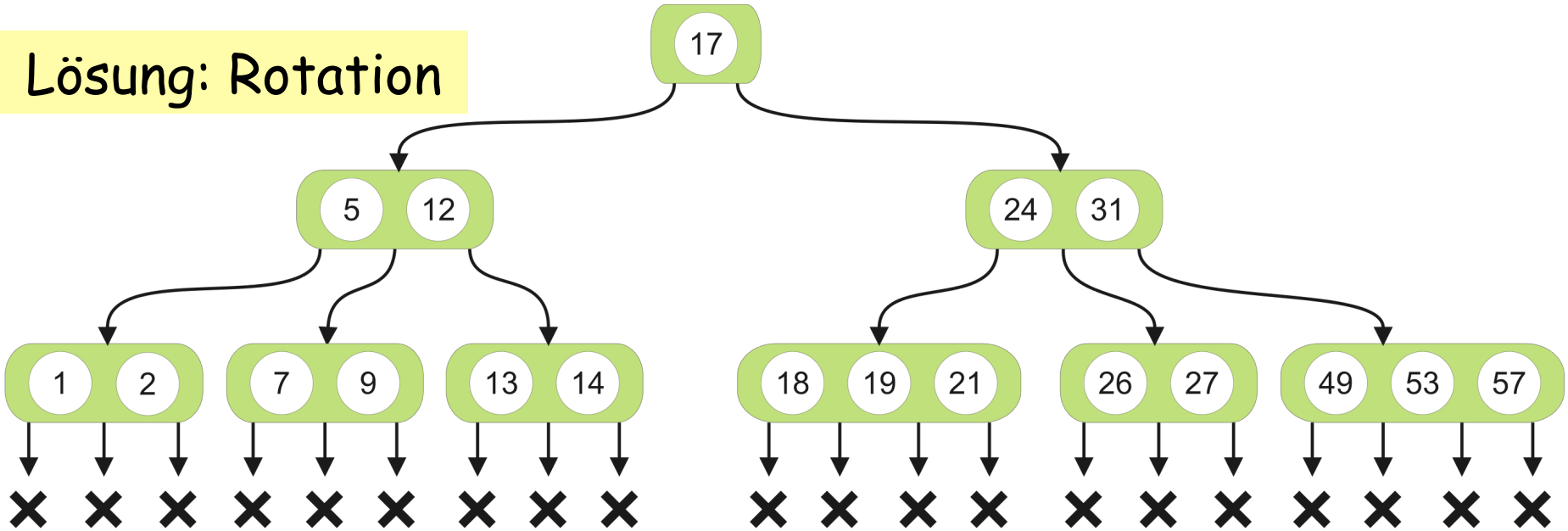
Lösung: Rotation

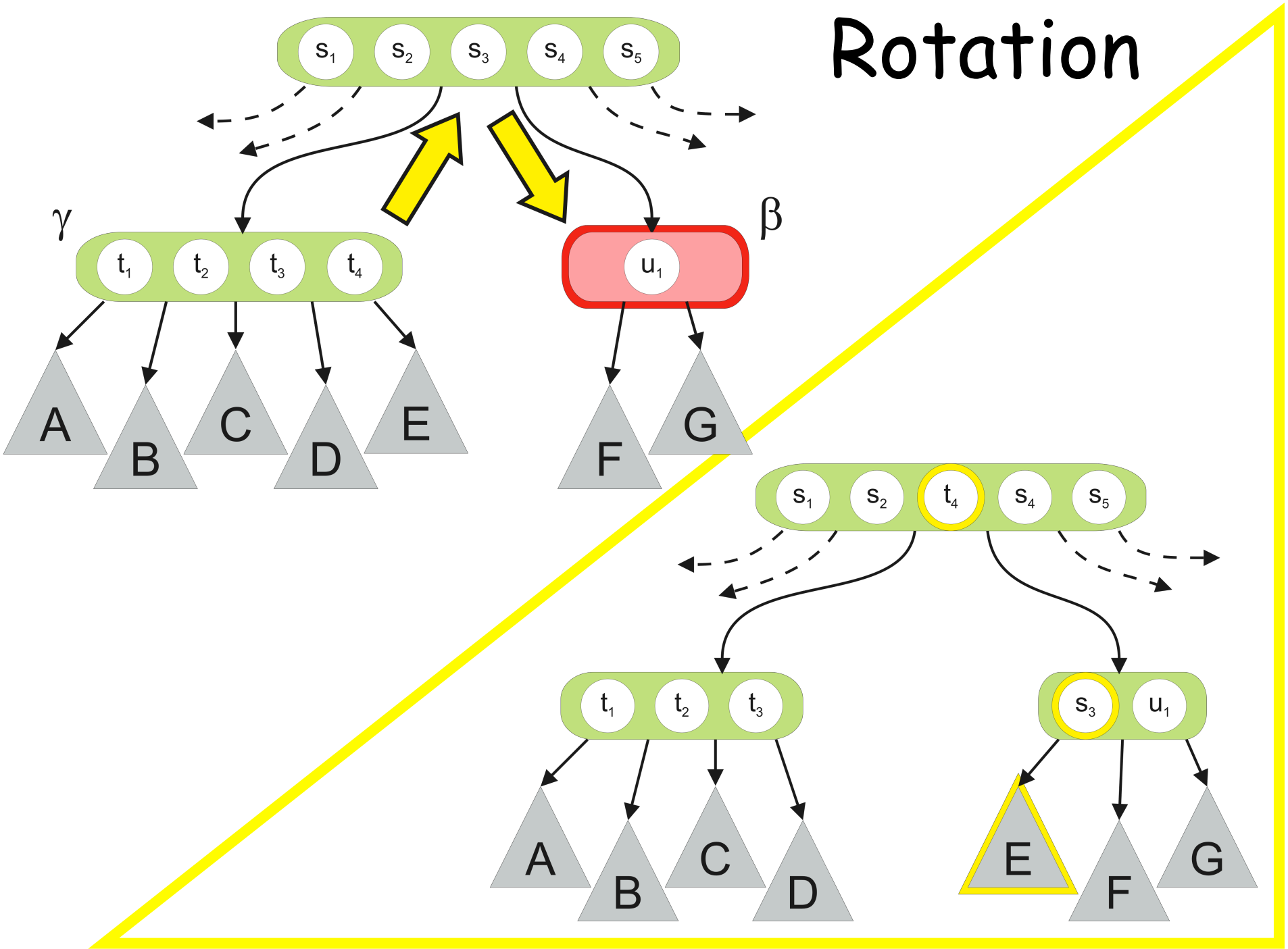


Problem: zu wenig Schlüssel nach Entfernen von 33➔31



Lösung: Rotation

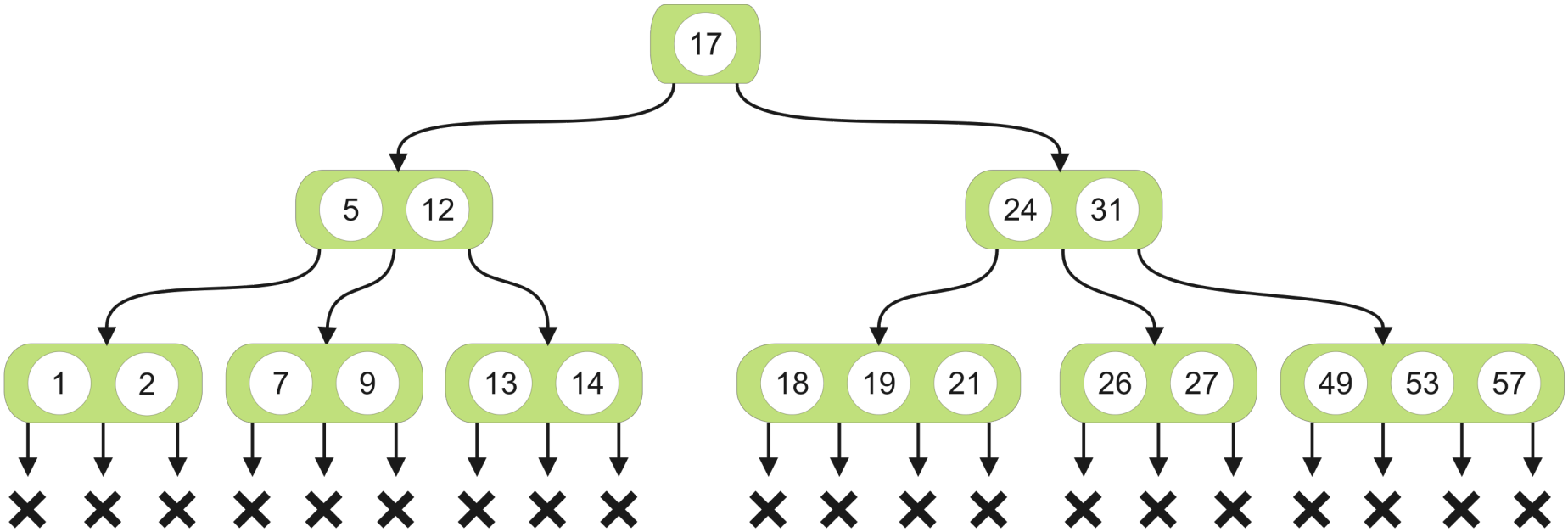



Rotation
s1 s2 s3 s4 s5
γ
t1 t2 t3 t4
β
u1
A
B
C
D
E
F
G
s1 s2 t4 s4 s5
t1 t2 t3
s3 u1
A
B
C
D
E
F
G

Entfernen in B-Bäumen

Beispiel 2:

- Entfernen von 7



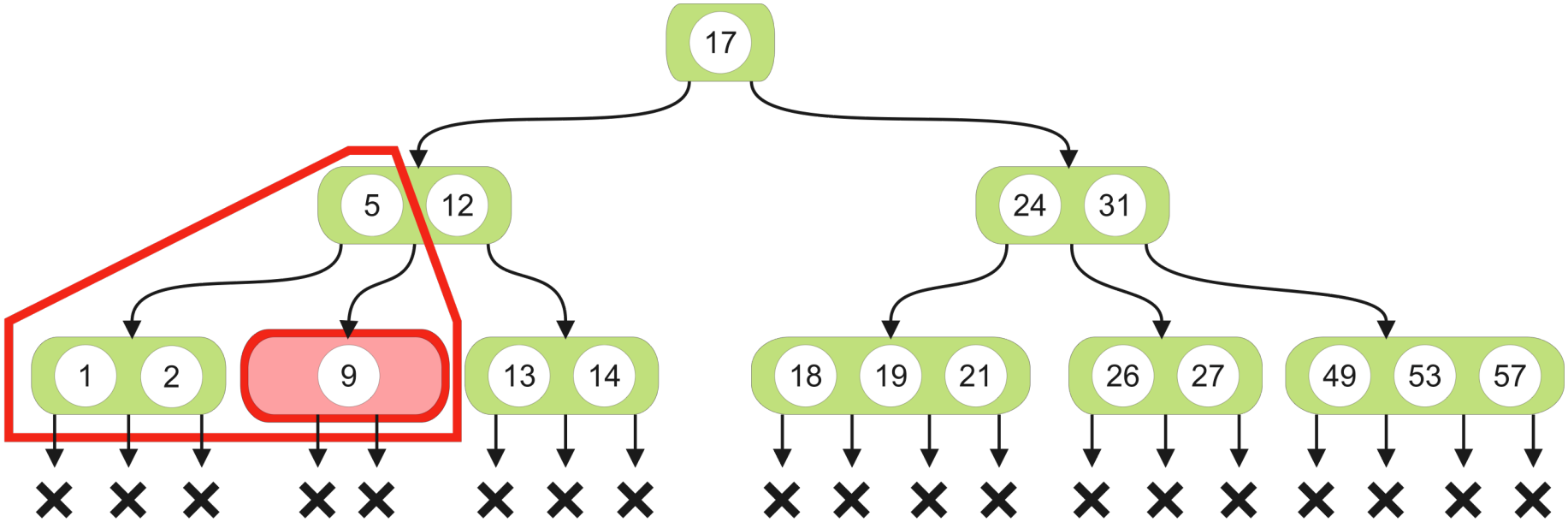
Entfernen in B-Bäumen

- Entfernen von 7

Problem: zu wenig Schlüssel

Rotation nicht möglich☹

Lösung: Verschmelzen

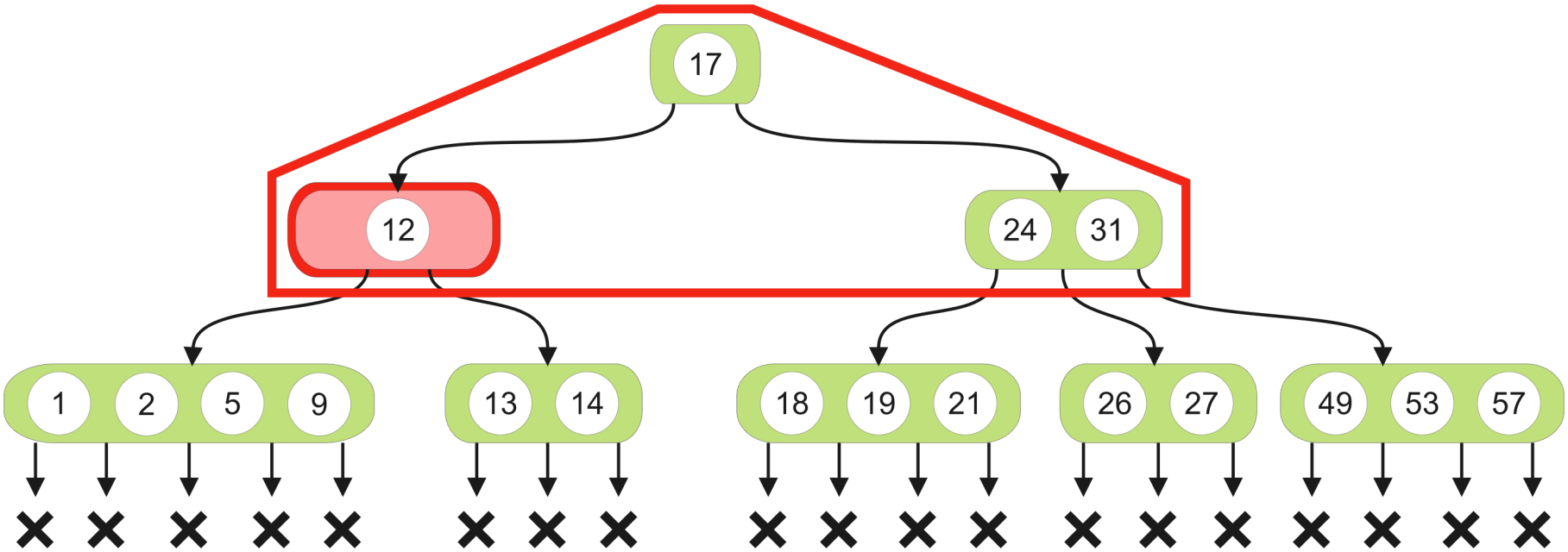


Entfernen in B-Bäumen

- Entfernen von 7

Problem: wieder zu wenig Schlüssel

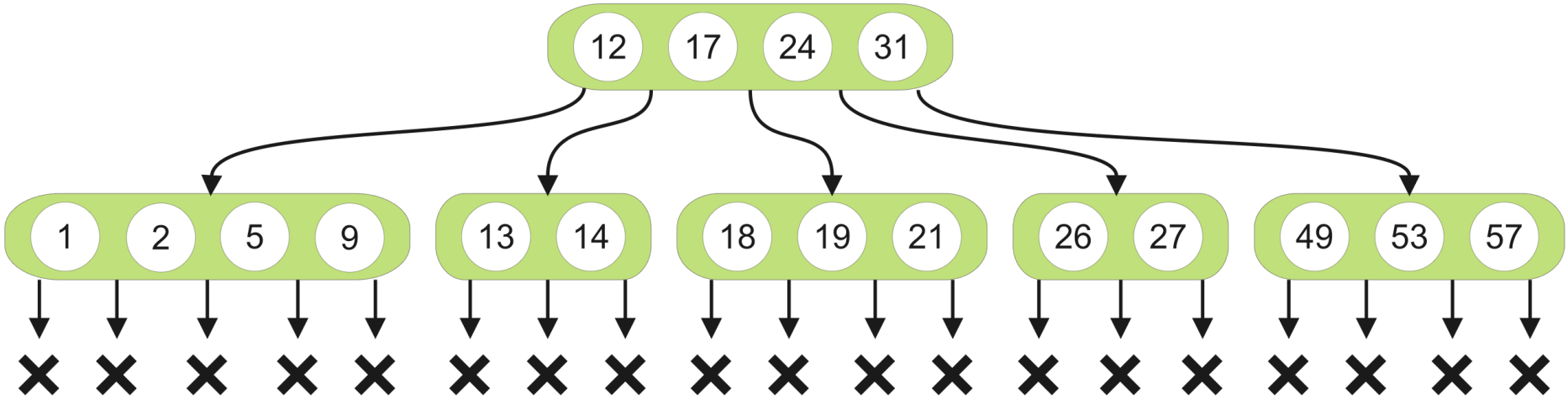
Lösung: Verschmelzen



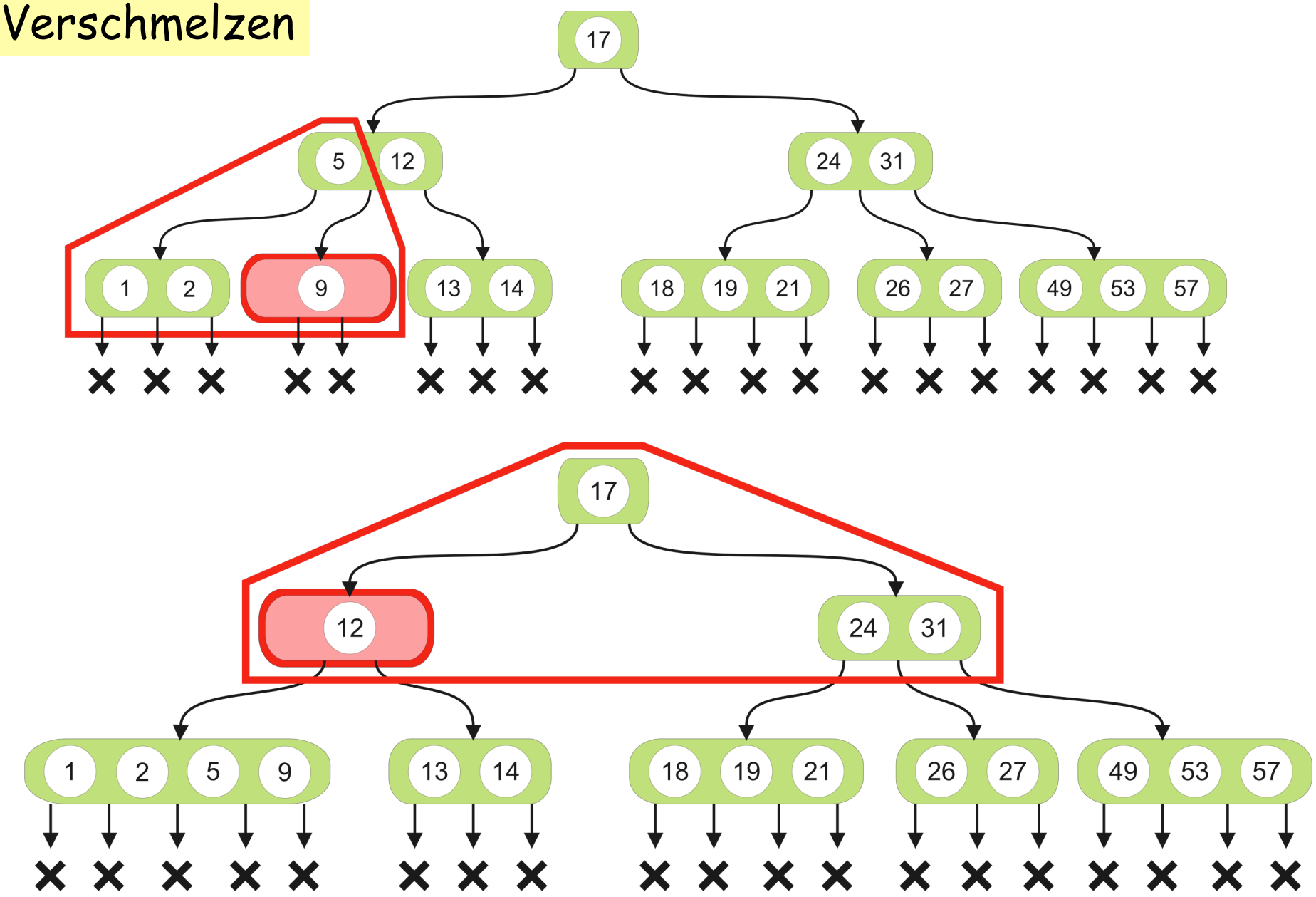
Entfernen in B-Bäumen

- Entfernen von 7

B-Bäume schrumpfen „von oben“



Verschmelzen



Entfernen in B-Bäumen

(1) Den zu entfernenden Schlüssel s suchen

(2) Falls s in einem Blatt ist: einfach entfernen

(3) Sonst: Suche direkten Vorgänger (dieser ist Blatt), überschreibe s mit dessen Schlüssel und entferne das Blatt.

(4) Falls dieses Blatt β nun zu wenige Schlüssel besitzt, dann entweder (5) oder (6)

(5) Reparatur A: Rotation: Falls ein Geschwisterblatt von β genug Schlüssel enthält, dann wird ein Schlüssel daraus verwendet um die Größe von β wiederherzustellen.

(6) Reparatur B: Verschmelzen: Sei γ ein Geschwisterblatt von β. Wir verschmelzen γ, β und ihren Trennschlüssel in einen neuen großen Knoten

(7) Setze die Reparatur rekursiv fort (evtl. nach (6) nötig)

Diskussion zum Entfernen (1)

- Warum ist Reparatur B korrekt?
- Wir wissen, dass
  - β nur $\lceil m/2 \rceil - 2$ Schlüssel enthält
  - beide Geschwister (bzw. γ) von β nur $\lceil m/2 \rceil - 1$ Schlüssel enthalten
  - damit: der neue Knoten höchstens $m-1$ Schlüssel besitzt.
    - Denn: $\leq \lceil m/2 \rceil - 2 + \lceil m/2 \rceil - 1 + 1$ Schlüssel
    - Fall: m ungerade: $= 2((m+1)/2) - 2 = m-1$
    - Fall: m gerade: $= 2(m/2) - 2 = m-2$

Analyse von Delete(r,s)

Laufzeit: Θ(Höhe des Baums)=$\Theta(\log n)$

Diskussion zum Entfernen (2)

- Alternative zu **Reparatur B** wäre eine erweiterte Rotation:
- Falls ein Geschwister γ' von einem Geschwisterknoten γ von β genügend Schlüssel besitzen würde, wäre eine doppelte Rotation denkbar: zunächst von γ' nach γ, danach von γ nach β.
- Also wäre es denkbar solange alle Nachbarn abzusuchen, bis ein Knoten gefunden wird.
- Die Zeit hierfür wäre $O(m)$.
- Aber: **Reparatur B** ist besser, weil Zeit: $O(\log n)$, und in der Praxis $\log n < m$

Varianten zum Einfügen/Entfernen

- Wir durchlaufen für diese Operationen den Baum einmal von oben nach unten, einmal von unten nach oben.
- Es existieren auch Alternativen bei denen beim Einfügen und Entfernen der Baum jeweils nur einmal von oben nach unten durchwandert wird:
- Hierbei werden die besuchten Knoten des Baumes gleich „auf Verdacht“ gespalten (falls sie groß sind) bzw. verschmolzen (falls sie klein sind).

Varianten von B-Bäumen

- Alternative Realisierungen garantieren jeweils eine 2/3 Füllung der Knoten.
- oder erweitern den Baum durch Zeiger zwischen den Geschwistern.
- oder akkumulieren „falsche“ Balancierungen auf und reparieren diese später gemeinsam.
- Es gibt immer wieder neue gute Einfälle!
- Auch in der praktischen Umsetzung gibt es immer wieder Neues!

bis heute: aktuelles Forschungsthema

Spezielle B-Bäume

- 2-3 Baum = B-Baum der Ordnung

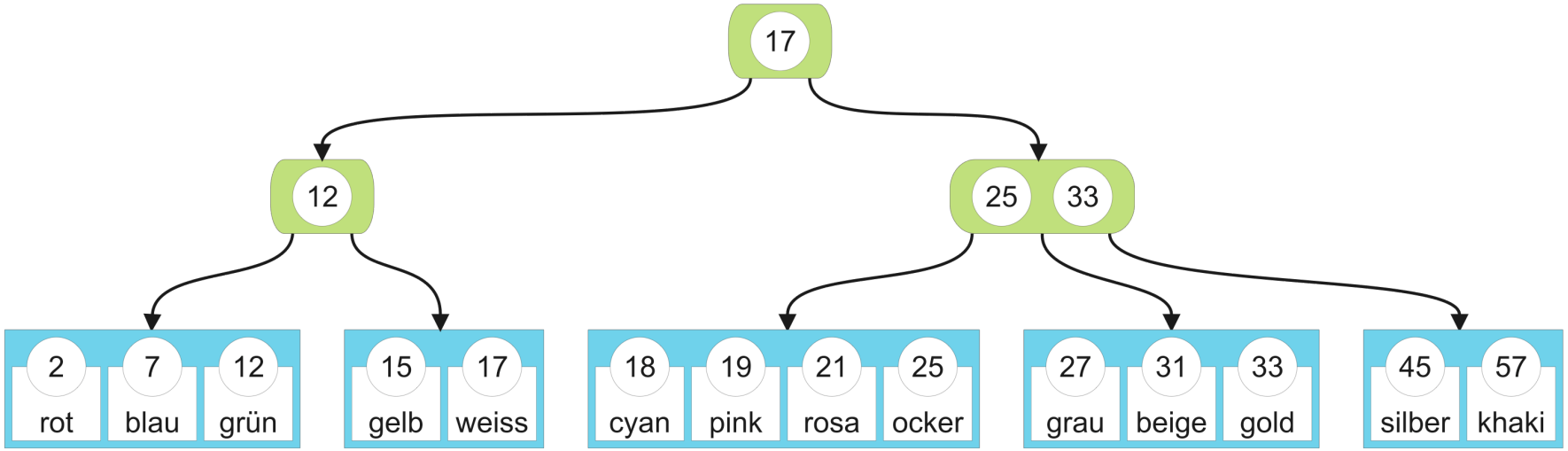
[Hopcroft ‘70]

- 2-3-4 Baum = B-Baum der Ordnung
- Rot-Schwarz-Baum = 2-3-4 Baum in dem große Knoten durch binäre Teilbäume simuliert werden

B⁺-Bäume

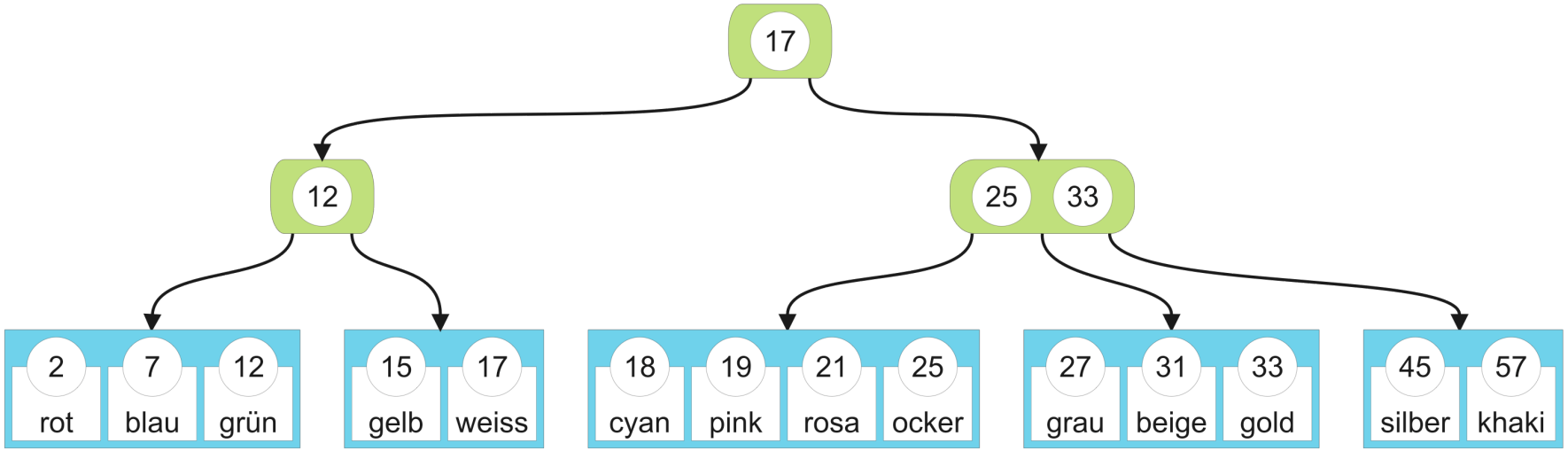
In Literatur auch: „B*-Bäume“

- Im Wesentlichen B-Bäume bei denen die Datensätze nur in den Blättern stehen.
- Die inneren Knoten enthalten ausschliesslich Schlüssel (und Zeiger) zur Suchsteuerung.



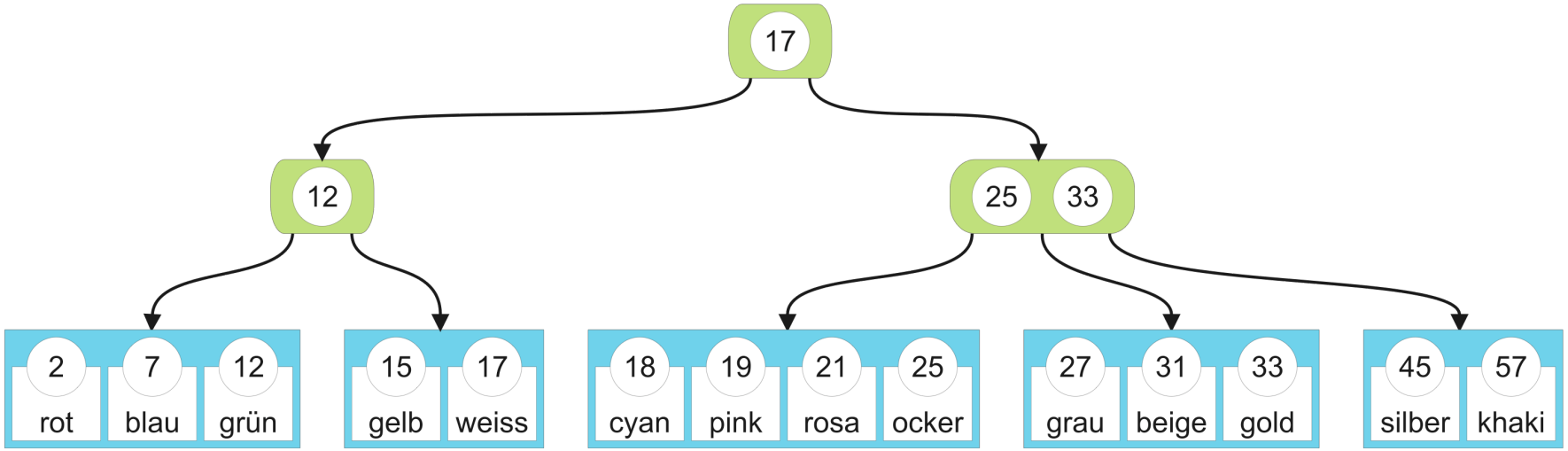
B⁺-Bäume

- Vorteil: Ein innerer Knoten kann mehr Schlüssel aufnehmen (da er keine info-Daten speichern muß)
- Dadurch wird Verzweigungsgrad erhöht und die Höhe nimmt ab.



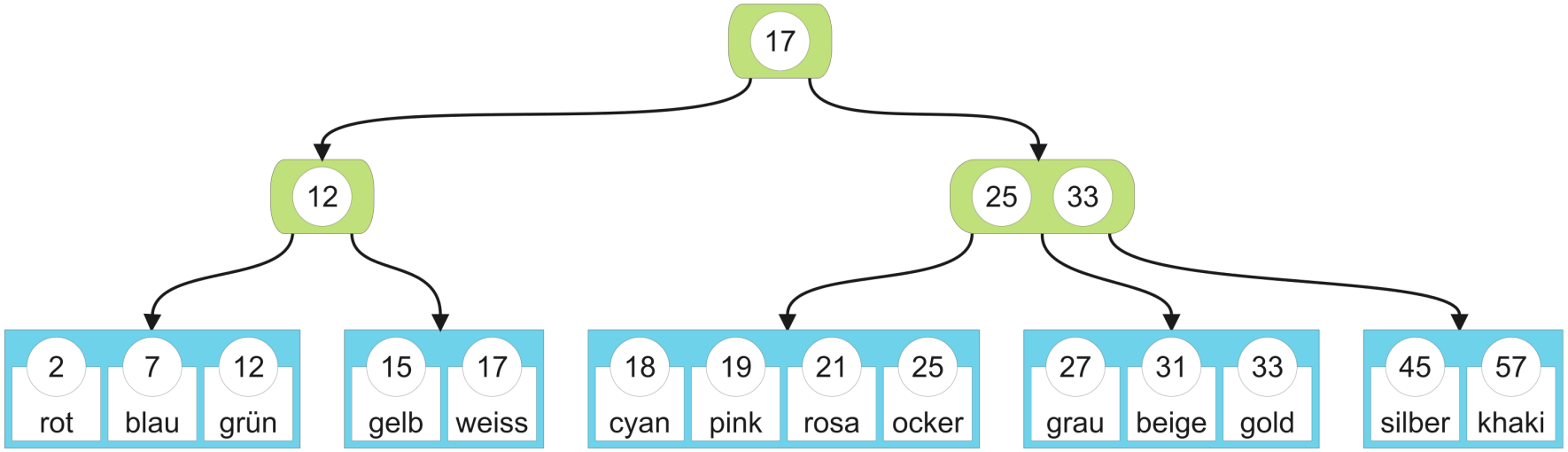
B^+-Baum der Ordnung (m,m^+)

- Die inneren Knoten besitzen zwischen $\lceil m/2 \rceil - 1$ und $m-1$ viele Schlüssel.
- In jedem Blatt sind zwischen $\lceil m^+/2 \rceil - 1$ und $m^+ - 1$ viele Schlüssel-Daten-Paare gespeichert.
- Dies führt zu besseren Externspeicherbedingungen.



Operationen in B⁺-Bäumen

- Suchen, Einfügen, Entfernen: sehr ähnlich wie in B-Bäumen.



Kap. 4.6: Dictionary-Realisierungen in der Praxis

Quelle: K. Mehlhorn, S. Näher:
LEDA: A platform for combinatorial and geometric computing,
Cambridge University Press, 1999, S. 127

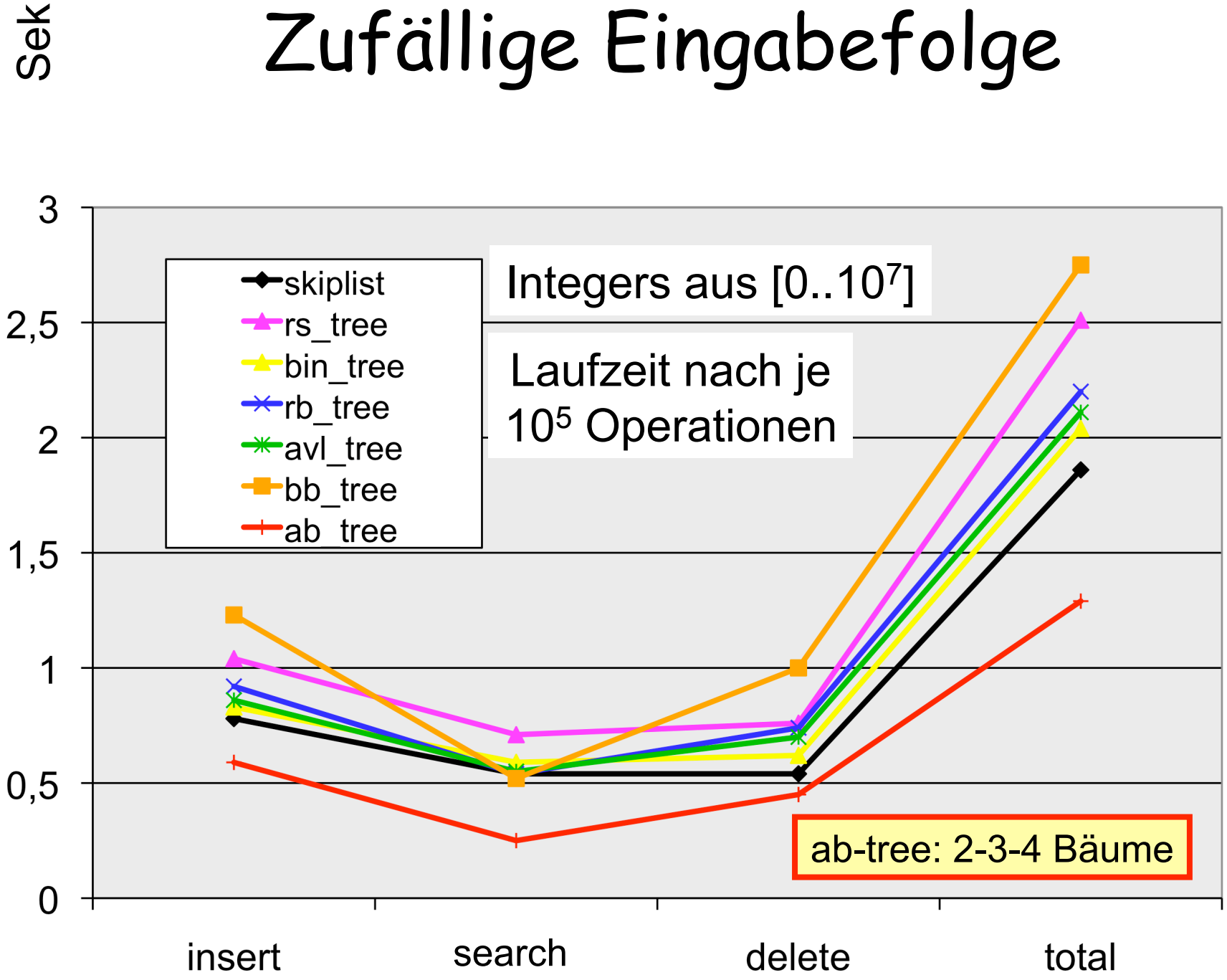
Untersuchte Realisierungen

- bin_tree: binäre Suchbäume
- rs_tree: zufällige binäre Suchbäume
- avl_tree: AVL-Bäume
- bb_tree: B-Bäume der Ordnung m=?
- ab_tree: 2-3-4 Bäume
- rb_tree: rot-schwarz Bäume
- skiplist: Skiplisten

bin_tree ∪ heap für zufällige prio-Werte)

Simulationen von 2-3-4 Bäumen auf binären Suchbäumen

Zufällige Eingabefolge



Sortierte Eingabefolge