Chaos - Nichtlineare Dynamik

Renate Thies

Universität Dortmund - Fachbereich Informatik
Lehrstuhl für Systemanalyse (LS11)

Sommersemester 2004

Einführung
- Strukturelle Stabilität
- Grenzzyklen
- Phasenraum

Bifurkation und Feigenbaumdiagramme
- Die logistische Wachstumsfunktion
- Das Feigenbaumdiagramm

Seltsame Attraktoren und ihre Klassifikation
- Der Ljapunov-Exponent
- Das Klimamodell von Edward N. Lorenz

Fraktale und fraktale Dimension
- Fraktale Dimension
- Lineare Fraktale
- Nichtlineare Fraktale

Einführung
- Strukturelle Stabilität
- Grenzzyklen
- Phasenraum

Bifurkation und Feigenbaumdiagramme
- Die logistische Wachstumsfunktion
- Das Feigenbaumdiagramm

Seltsame Attraktoren und ihre Klassifikation
- Der Ljapunov-Exponent
- Das Klimamodell von Edward N. Lorenz

Fraktale und fraktale Dimension
- Fraktale Dimension
- Lineare Fraktale
- Nichtlineare Fraktale

Chaostheorie

Chaostheorie beschäftigt sich mit Systemen, denen zwar deterministische Gesetzmäßigkeiten zugrunde liegen, deren Verhalten jedoch irregulär und langfristig nicht vorhersagbar ist.

Chaostheorie

Chaostheorie beschäftigt sich mit Systemen, denen zwar deterministische Gesetzmäßigkeiten zugrunde liegen, deren Verhalten jedoch irregulär und langfristig nicht vorhersagbar ist.

- Die zugrunde liegende DGLs sind nicht nicht linear ($\Longrightarrow$ **Nichtlineare Dynamik**).
- Folge: kleine Variation in den Anfangsbedingungen verstärken sich exponentiell.
- Vorhersage über genauen Systemzustand nur begrenzt berechenbar bzw. unmöglich.

Chaostheorie

Chaostheorie beschäftigt sich mit Systemen, denen zwar deterministische Gesetzmäßigkeiten zugrunde liegen, deren Verhalten jedoch irregulär und langfristig nicht vorhersagbar ist.

- Die zugrunde liegende DGLs sind nicht nicht linear ($\Longrightarrow$ **Nichtlineare Dynamik**).
- Folge: kleine Variation in den Anfangsbedingungen verstärken sich exponentiell.
- Vorhersage über genauen Systemzustand nur begrenzt berechenbar bzw. unmöglich.

Chaostheorie untersucht dieses Verhalten mit dem Ziel, statistische Aussagen über das System zu treffen.

Chaos

ursprünglich: altgriech., der ungeordnete Urstoff vor der Weltschöpfung
heute: schwer vorhersehbarer Zustand

Chaos

ursprünglich: altgriech., der ungeordnete Urstoff vor der Weltschöpfung
heute: schwer vorhersehbarer Zustand

Determinismus

Ein Algorithmus heißt deterministisch, wenn es zu jeder (Programm-)Situation höchstens eine nachfolgende Situation geben kann, wenn also zu jedem Zeitpunkt der Folgeschritt eindeutig bestimmt ist.

Chaos

ursprünglich: altgriech., der ungeordnete Urstoff vor der Weltschöpfung
heute: schwer vorhersehbarer Zustand

Determinismus

Ein Algorithmus heißt deterministisch, wenn es zu jeder (Programm-)Situation höchstens eine nachfolgende Situation geben kann, wenn also zu jedem Zeitpunkt der Folgeschritt eindeutig bestimmt ist.

Deterministisches Chaos

Verhalten, bei dem einfache deterministische Gesetze zu irregulären Bewegungen führen, wird als Deterministisches Chaos bezeichnet.

Beispiele für Deterministisches Chaos

Verkehrschaos viele Verkehrsteilnehmer mit ihren Bewegungsmöglichkeiten (Freiheitsgrade).

periodisch getriebenes Pendel System mit wenigen Freiheitsgraden; Position auf längere Sicht unvorhersehbar.

Beispiele für Deterministisches Chaos

Verkehrschaos viele Verkehrsteilnehmer mit ihren Bewegungsmöglichkeiten (Freiheitsgrade).

periodisch getriebenes Pendel System mit wenigen Freiheitsgraden; Position auf längere Sicht unvorhersehbar.

tropfendes Wasserhahn durch das „Zittern“ des einzelnen Tropfens wird der nachfolgende beeinflußt.

Schmetterlingseffekt „Kann der Flügelschlag eines Schmetterlings in Brasilien einen Tornado in Texas hervorrufen?“ (Edward N. Lorenz)

Beispiele für Deterministisches Chaos

Verkehrschaos
: viele Verkehrsteilnehmer mit ihren Bewegungsmöglichkeiten (Freiheitsgrade).

periodisch getriebenes Pendel
: System mit wenigen Freiheitsgraden; Position auf längere Sicht unvorhersehbar.

tropfendes Wasserhahn
: durch das „Zittern“ des einzelnen Tropfens wird der nachfolgende beeinflußt.

Schmetterlingseffekt
: „Kann der Flügelschlag eines Schmetterlings in Brasilien einen Tornado in Texas hervorrufen?“ (Edward N. Lorenz)

Kleine Ursache - große, meist unvorhersehbare Wirkung

Einführung
- Strukturelle Stabilität
- Grenzzyklen
- Phasenraum

Bifurkation und Feigenbaumdiagramme
- Die logistische Wachstumsfunktion
- Das Feigenbaumdiagramm

Seltsame Attraktoren und ihre Klassifikation
- Der Ljapunov-Exponent
- Das Klimamodell von Edward N. Lorenz

Fraktale und fraktale Dimension
- Fraktale Dimension
- Lineare Fraktale
- Nichtlineare Fraktale

Stabilitäts-Dogma

- galt bis ca. 1950
- mathematische Modelle, die strukturelle Instabilität aufweisen haben nichts mit der Realität zu tun
- Verhaltensabhängigkeit von Modellparametern (bisher konstant)

1. Beispiel:

$$\dot{x} = f(x, \lambda) = -x^3 + \lambda x \tag{1}$$

$$= -x(x^2 + \lambda) \tag{2}$$

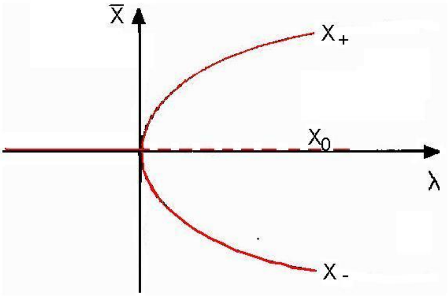
1. Beispiel:

$$\dot{x} = f(x, \lambda) = -x^3 + \lambda x \quad (1)$$
$$= -x(x^2 + \lambda) \quad (2)$$

stationäre Zustände (Fixpunkte) für $\dot{x} = 0$

$$x_0 = \bar{x} = = 0 \quad (3)$$
$$x_+ = \bar{x} = +\sqrt{\lambda} \quad (4)$$
$$x_- = \bar{x} = -\sqrt{\lambda} \quad (5)$$

für $\lambda = 0$ fallen die Lösungen x_+ und x_- zusammen



(Gabel- bzw. Pitchfork-)Bifurkation

- $\bar{x}$ ist für $\lambda < 0$ global asymptotisch stabil
- für $\lambda > 0$ ist x_0 instabil und
- für $\lambda > 0$ sind x_+ und x_- asymptotisch lokal stabil (nicht global)

- beim Übergang $\lambda = 0$ ändert sich das *qualitative Verhalten* des System-Modells
- Widerspruch zum Stabilitäts-Dogma
- solche Modelle waren bis 1950 nicht erlaubt, weil sie als unnatürlich galten
- Rene Thom: Katastrophentheorie

2. Beispiel:

$$\dot{x} = -x^2 + \mu \tag{6}$$

(7)

2. Beispiel:

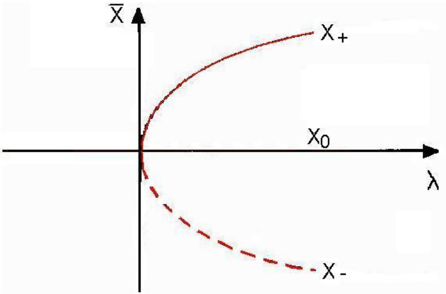
$$\dot{x} = -x^2 + \mu \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

stationäre Zustände (Fixpunkte) für $\dot{x} = 0$

$$x_+ = \bar{x} \quad = \quad +\sqrt{\lambda} \tag{8}$$

$$x_- = \bar{x} \quad = \quad -\sqrt{\lambda} \tag{9}$$



(Grenzpunkt-)Bifurkation

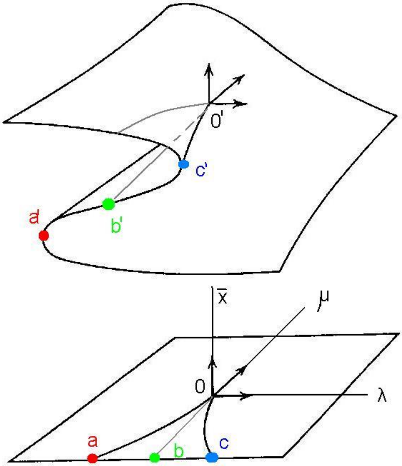
- x_+: stabiler Zweig
- x_- instabiler Zweig

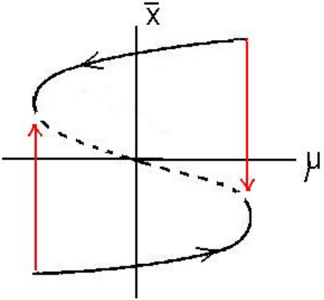
3. Beispiel:

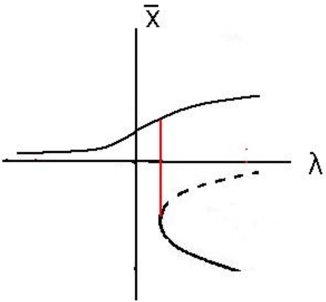
$$\dot{x} = -x^3 + \lambda x + \mu \tag{10}$$

stationäre Zustände für kubische Gleichung (kanonische Form):
bis zu 3 reelle Lösungen

- Ursprung 0 bildet Spitzensingularität
- für $\lambda < 0$: 1 Lösung
- für $\lambda > 0$: 3 Lösungen







$\lambda > 0$ (Hyterese) $\qquad\qquad$ $\mu \neq 0$

Grenzkurve im (μ, λ)-Paramterraum zwischen den beiden Lösungsbereichen:

$$4\lambda^3 + 27\mu^2 = 0 \tag{11}$$

Einführung
- Strukturelle Stabilität
- Grenzzyklen
- Phasenraum

Bifurkation und Feigenbaumdiagramme
- Die logistische Wachstumsfunktion
- Das Feigenbaumdiagramm

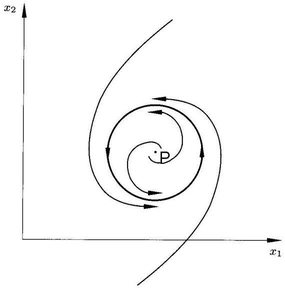
Seltsame Attraktoren und ihre Klassifikation
- Der Ljapunov-Exponent
- Das Klimamodell von Edward N. Lorenz

Fraktale und fraktale Dimension
- Fraktale Dimension
- Lineare Fraktale
- Nichtlineare Fraktale

In dissipativen Systemmodellen mit Phasenraumdimension 2 gibt es außer *Fokus* und *Knoten* noch einen dritten Attraktortyp:

Grenzzyklus

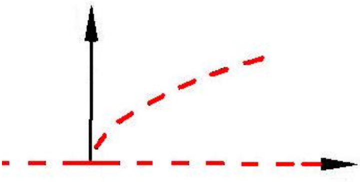
Alle Bahnen
münden in einen (stabilen) Grenzzyklus,
der einen instabilen Fixpunkt P umgibt.
(entdeckt von Poincaré)



Beispiel:

$x_1 = \nu \cos(\varphi)$; $x_2 = \nu \sin(\varphi)$

1. $\dot{\nu} = \lambda\nu - \nu^3 \quad \nu > 0$
2. $\dot{\varphi} = \omega$



aus 2. folgt: $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$

aus 1. lassen sich Fixpunkte ermitteln: $\bar{\nu} = 0$ und $\bar{\nu} = \sqrt{\lambda}$

Beispiel:

$x_1 = \nu \cos(\varphi); \quad x_2 = \nu \sin(\varphi)$

für $\lambda < 0$ ist $\bar{\nu} = 0$, (d.h. $\binom{x_1}{x_2} = \binom{0}{0}$ ein stabiler Fixpunkt

für $\lambda = 0$ wird dieser Fixpunkt instabil (Hopf Bifurkation)

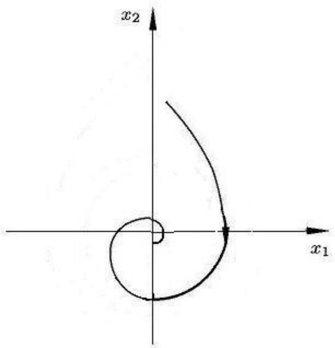
für $\lambda > 0$ ist $\bar{\nu} = 0$ instabil und $\bar{\nu} = \sqrt{\lambda}$

d.h.:

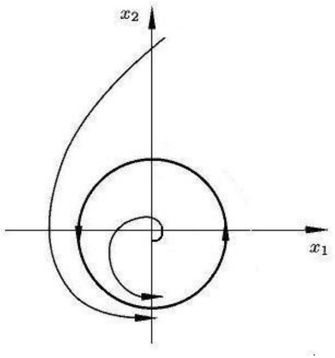
x_1 konvergiert gegen $\sqrt{\lambda}\cos(\varphi_0 + \omega t)$

x_2 konvergiert gegen $\sqrt{\lambda}\sin(\varphi_0 + \omega t)$

(zeitabhängige Lösung!)



$\lambda < 0$



$\lambda > 0$

Grenzzyklus
(strukturell stabiles Phasenportrait)

Einführung
- Strukturelle Stabilität
- Grenzzyklen
- Phasenraum

Bifurkation und Feigenbaumdiagramme
- Die logistische Wachstumsfunktion
- Das Feigenbaumdiagramm

Seltsame Attraktoren und ihre Klassifikation
- Der Ljapunov-Exponent
- Das Klimamodell von Edward N. Lorenz

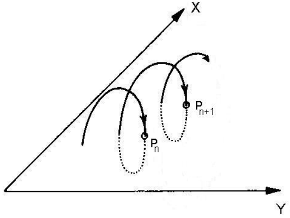
Fraktale und fraktale Dimension
- Fraktale Dimension
- Lineare Fraktale
- Nichtlineare Fraktale

Frage:
Welche weiteren Phänomene treten neben Fixpunkten (Punkt-Attraktor) und Grenzzyklus (periodischer Attraktor) auf?

Beobachtungstrick:
niedrigdimensionale Projektionen!

Poincaré-Schnitt durch Phasenraum

Dynamik der Durchstoßpunkte P_i
(Dynamik der Minima/Maxima)



Seien x, y die Koordinaten der Schnitt-Ebene, so kann man diese Dynamik beschreiben mittels:

$$Rekurrenz - /Wiederkehrrelation \begin{cases} x_{n+1} & = f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} & = g(x_n, y_n) \end{cases}$$

Beispiel:
Grenzzyklus: ein einziger Durchstoßpunkt

allgemein:
k Durchstoßpunkte: periodischer Attraktor: Zyklus der Ordnung k

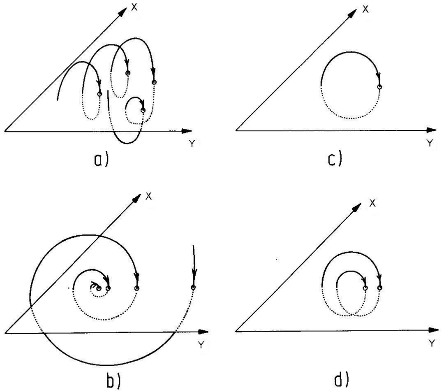
Poincaré-Schnitte:

a) Chaotische Bewegung

b) Annäherung
an einen Fixpunkt

c) Einfacher Zyklus

d) Zyklus der Periode 2



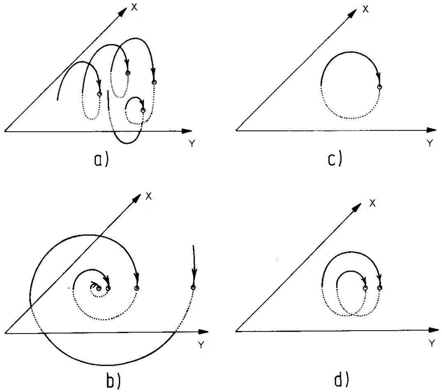
Poincaré-Schnitte:

a) Chaotische Bewegung

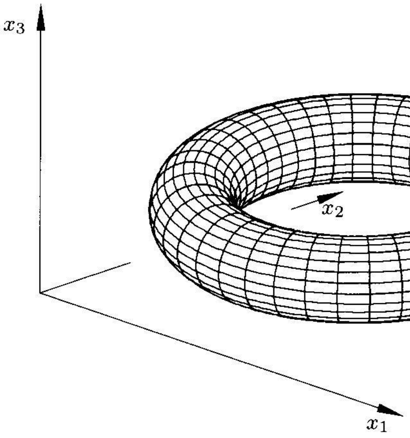
b) Annäherung
an einen Fixpunkt

c) Einfacher Zyklus

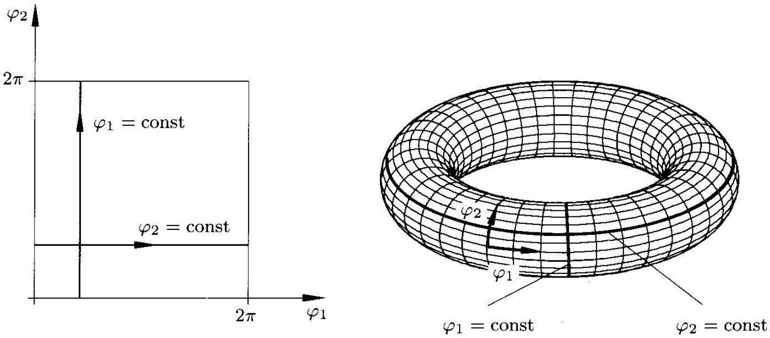
d) Zyklus der Periode 2



weiteres Phänomen:
Quasiperiodischer Attraktor (invariante Tori)



2D-Torus im dreidimensionalen Phasenraum



Die zweidimensionale Mannigfaltigkeit des Torus
in den lokalen Koordinaten φ_1 und φ_1
auf ein Quadrat umkehrbar eindeutig (bijektiv) abgebildet

Einführung
- Strukturelle Stabilität
- Grenzzyklen
- Phasenraum

Bifurkation und Feigenbaumdiagramme
- Die logistische Wachstumsfunktion
- Das Feigenbaumdiagramm

Seltsame Attraktoren und ihre Klassifikation
- Der Ljapunov-Exponent
- Das Klimamodell von Edward N. Lorenz

Fraktale und fraktale Dimension
- Fraktale Dimension
- Lineare Fraktale
- Nichtlineare Fraktale

Verhulst Modell

$$y_{t+1} = \mu y_t (1 - y_t)$$

Wachstumsfaktor: μ
Anfangspopulation: y_0

1845 von Verhulst (1804-1849) eingesetzt zur Modellierung des zyklischen Wachstumsverhaltens einer Population in einem geschlossenen Gebiet.

Herleitung

1. $N_{t+1} = aN_t$, Anzahl der Tiere im Jahr $t + 1$,
   (a Wachstumsfaktor)

Herleitung

1. $N_{t+1} = aN_t$, Anzahl der Tiere im Jahr $t+1$, (a Wachstumsfaktor)
2. Population kann nicht unbegrenzt wachsen (begrenzte Futtervorräte)
   Dies wird duch den Faktor $\frac{N_{max}-N_t}{N_{max}}$ berücksichtigt (N_{max} unerreichbarer Maximalwert)
   $\rightarrow N_{t+1} = aN_t\left(1 - \frac{N_t}{N_{max}}\right)$

Herleitung

1. $N_{t+1} = aN_t$, Anzahl der Tiere im Jahr $t+1$,
   (a Wachstumsfaktor)
2. Population kann nicht unbegrenzt wachsen
   (begrenzte Futtervorräte)
   Dies wird duch den Faktor $\frac{N_{max} - N_t}{N_{max}}$ berücksichtigt
   (N_{max} unerreichbarer Maximalwert)
   $\rightarrow N_{t+1} = aN_t \left(1 - \frac{N_t}{N_{max}}\right)$
3. Einführung dimensionsloser Größen, da für das Verhalten des Systems die absoluten Zahlen N_t und N_{max} nicht relevant sind. Wichtig ist das Verhältnis $y_t = \frac{N_t}{N_{max}}$

Herleitung

1. $N_{t+1} = aN_t$, Anzahl der Tiere im Jahr $t+1$,
   (a Wachstumsfaktor)
2. Population kann nicht unbegrenzt wachsen
   (begrenzte Futtervorräte)
   Dies wird duch den Faktor $\frac{N_{max}-N_t}{N_{max}}$ berücksichtigt
   (N_{max} unerreichbarer Maximalwert)
   $\rightarrow N_{t+1} = aN_t\left(1-\frac{N_t}{N_{max}}\right)$
3. Einführung dimensionsloser Größen, da für das Verhalten des Systems die absoluten Zahlen N_t und N_{max} nicht relevant sind. Wichtig ist das Verhältnis $y_t = \frac{N_t}{N_{max}}$
4. Zur Bestimmung des „Anteils" teile durch N_{max} und erhalte
   $y_{t+1} = \mu y_t(1-y_t)$

Iteration

- $y_{t+1} = \mu y_t(1 - y_t)$ Verhulst
- $y_{t+1} = f(y_t)$ Abbildung mit $0 < y < 1$
- $y_{t+1} = f_\mu(y_t)$ 1. Iterierte
- $f(f(y_k)) = y_{k+2} = f^2(y_k)$ 2. Iterierte
- *allgemein:* $f^p(y_k)$ p-te Iterierte

Iteration

- $y_{t+1} = \mu y_t(1 - y_t)$ Verhulst
- $y_{t+1} = f(y_t)$ Abbildung mit $0 < y < 1$
- $y_{t+1} = f_\mu(y_t)$ 1. Iterierte
- $f(f(y_k)) = y_{k+2} = f^2(y_k)$ 2. Iterierte
- *allgemein:* $f^p(y_k)$ p-te Iterierte

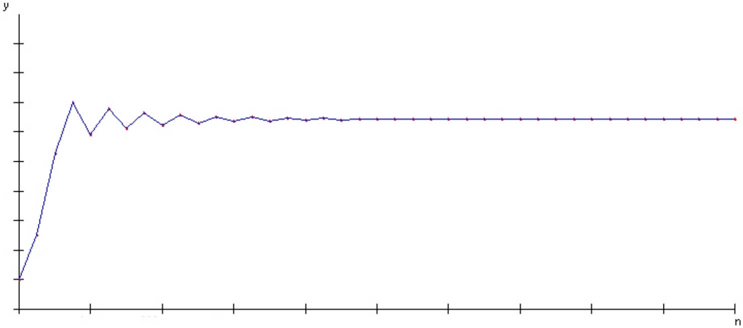
Fragen

- Konvergenz? (abh. von μ)
- Stabilität der Bahn? (abhängig von y_0)

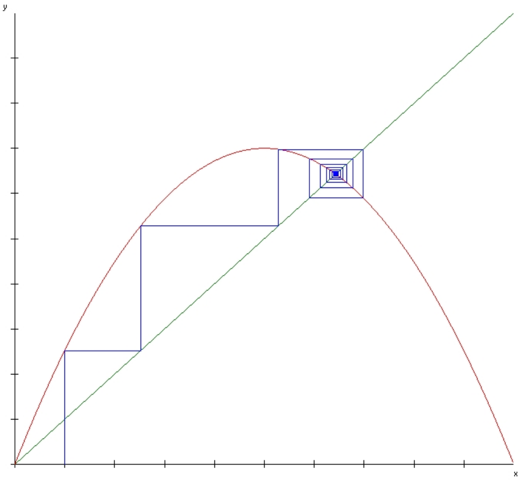
Mathematische Iteration für $\mu = 2.8$ und $y_0 = 0.02$

- 1. Iteration: $f(y_0) = 2.8 * 0.02(1 - 0.02) = 0.05488 = y_1$
- 2. Iteration: $f(y_1) = 0.1452302$
- 3. Iteration: $f(y_2) = 0.34758892$
- ...
- 10. Iteration: $f(y_9) = 0.64081372$
- ...
- 15. Iteration: $f(y_{14}) = 0.64352313$
- ...
- 20. Iteration: $f(y_{19}) = 0.64263854$

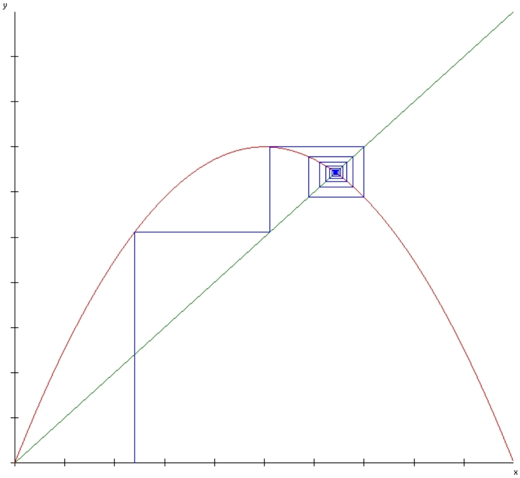
Fixpunkt bei ≈ 0.64



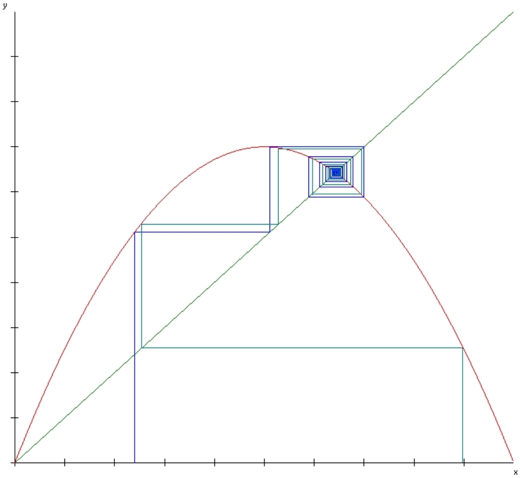
Zeitreihendiagramm für $y_{t+1} = \mu y_t(1 - y_t)$
$t_{max} = 40$; $y_0 = 0.11$; $\mu = 2.8$



Graphische Iteration für $\mu = 2.8$ und $y_0 = 0.1$
blaue Iterationslinie: Trajektorie

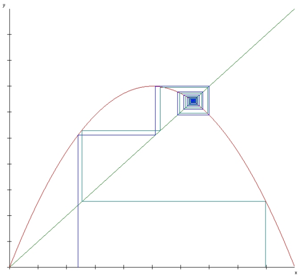


Graphische Iteration für $\mu = 2.8$ und $y_0 = 0.24$

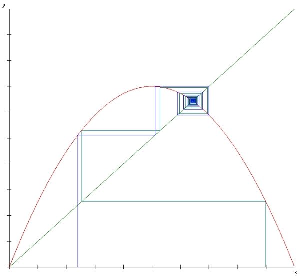


Graphische Iteration für $\mu = 2.8$ und $y_0 = 0.24$ bzw. $y_0 = 0.89$

- Ein stabiler Fixpunkt y^* fokussiert die Bahnen (hier: $y^* \approx 0.642857$) (Fixpunkt-Attraktor).
- Für $\mu = 2.8$ strebt die Folge immer auf y^* zu (unabhängig von $y_0 \in]0;1[$) (Bassin)
- Auch $y_0 = 0$ ist Fixpunkt, jedoch nur für $y_0 = 0$ (Repulsor)



- Ein stabiler Fixpunkt y^* fokussiert die Bahnen (hier: $y^* \approx 0.642857$) (Fixpunkt-Attraktor).
- Für $\mu = 2.8$ strebt die Folge immer auf y^* zu (unabhängig von $y_0 \in]0;1[$) (Bassin)
- Auch $y_0 = 0$ ist Fixpunkt, jedoch nur für $y_0 = 0$ (Repulsor)



Kriterium für stabilen Fixpunkt:

Ein Fixpunkt y^* ist (lokal) stabil, wenn $\left|\frac{d}{dy^*} f(y_*)\right| < 1$

Attraktor

Ein Punkt, (der auch eine Menge von Punkten sein kann,) der sämtliche Trajektorien anzieht.

Attraktor

Ein Punkt, (der auch eine Menge von Punkten sein kann,) der sämtliche Trajektorien anzieht.

Bassin

Teil des Phasenraumes bzw. Bereich von Startwerten y_0, aus dem alle Trajektoren in einen Attraktor münden.

Attraktor
Ein Punkt, (der auch eine Menge von Punkten sein kann,) der sämtliche Trajektorien anzieht.

Bassin
Teil des Phasenraumes bzw. Bereich von Startwerten y_0, aus dem alle Trajektoren in einen Attraktor münden.

Repulsor
Ein Fixpunkt, der nur von wenigen Startwerten aus erreicht wird und von dem sich ansonsten alle Trajektorien entfernen.

Attraktor
Ein Punkt, (der auch eine Menge von Punkten sein kann,) der sämtliche Trajektorien anzieht.

Bassin
Teil des Phasenraumes bzw. Bereich von Startwerten y_0, aus dem alle Trajektoren in einen Attraktor münden.

Repulsor
Ein Fixpunkt, der nur von wenigen Startwerten aus erreicht wird und von dem sich ansonsten alle Trajektorien entfernen.

Repellor
Das Gegenteil eines Attraktors.

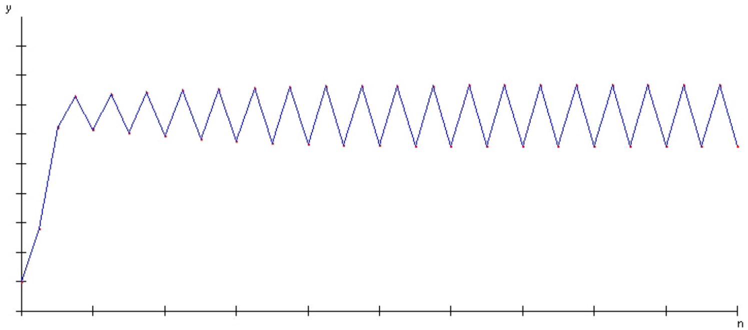
Bisher:
Betrachtung der Funktion $y_{t+1} = 2.8 y_t (1 - y_t)$

Frage:
Wie sieht der Attraktor für anderes bzw. größeres μ aus?
Wie sieht der Attraktor aus für $\left| \frac{d}{dy^*} f(y_*) \right| \geq 1$?

Bisher:
Betrachtung der Funktion $y_{t+1} = 2.8y_t(1 - y_t)$

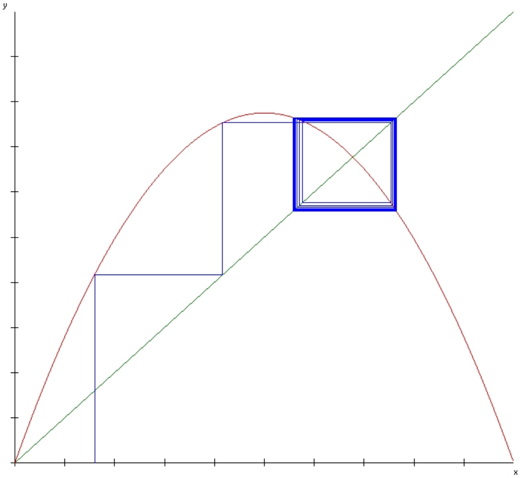
Frage:
Wie sieht der Attraktor für anderes bzw. größeres μ aus?
Wie sieht der Attraktor aus für $\left|\frac{d}{dy^*}f(y_*)\right| \geq 1$?

Es folgt:
Betrachtung der Funktion $y_{t+1} = \mu y_t(1 - y_t)$ mit $\mu = 3.1$



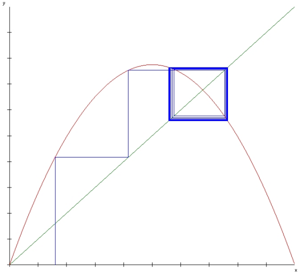
Zeitreihendiagramm für $y_{t+1} = \mu y_t(1 - y_t)$

$t_{max} = 40$; $y_0 = 0.1$; $\mu = 3.1$

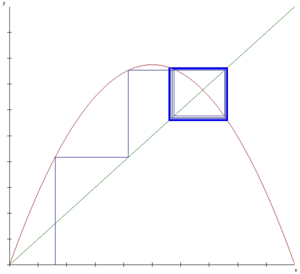


Graphische Iteration für $\mu = 3.1$ und $y_0 = 0.16$

- Trajektorie geht in Zyklus der Periode 2 über (Spaltung des Fixpunktes)
- Fixpunkte liegen bei $y_1^* \approx 0.558$ und $y_2^* \approx 0.764$
- Grenzzyklus



- Trajektorie geht in Zyklus der Periode 2 über (Spaltung des Fixpunktes)
- Fixpunkte liegen bei $y_1^* \approx 0.558$ und $y_2^* \approx 0.764$
- Grenzzyklus



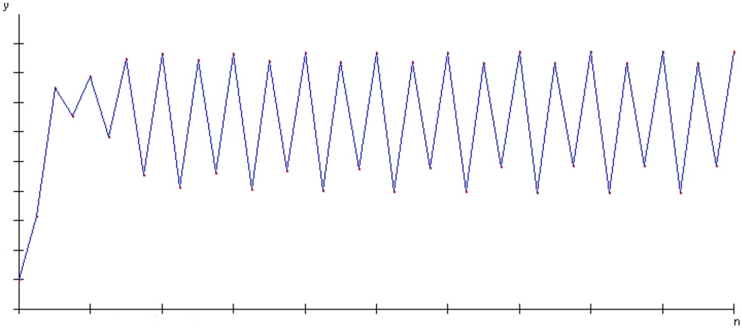
Bifurkation

Die Spaltung des Fixpunktes bzw. der Fixpunkte.

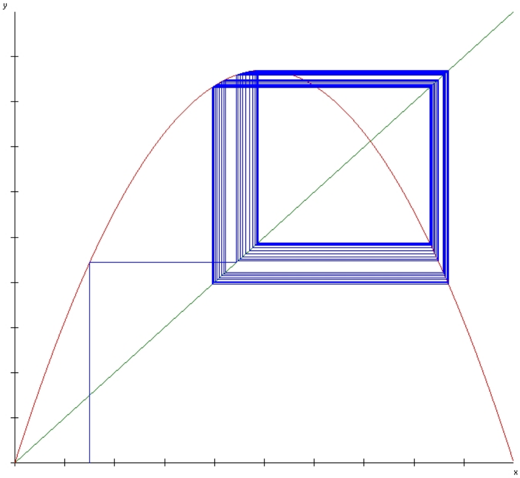
Frage: Was passiert bei einer weitereren Erhöhung von μ?

Frage: Was passiert bei einer weitereren Erhöhung von μ?

Es folgt:
Betrachtung der Funktion $y_{t+1} = \mu y_t(1 - y_t)$ mit $\mu = 3.48$

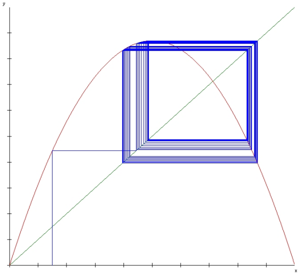


Zeitreihendiagramm für $y_{t+1} = \mu y_t(1 - y_t)$
$t_{max} = 40$; $y_0 = 0.1$; mit $\mu = 3.48$

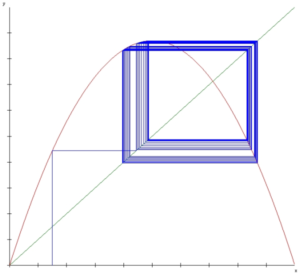


Graphische Iteration bis y_{100} für $\mu = 3.48$ und $y_0 = 0.15$

- Erneut Bifurkation der Fixpunkte x_1^* und x_2^*
- System konvergiert auf einem Zyklus der Periode 4.



- Erneut Bifurkation der Fixpunkte x_1^* und x_2^*
- System konvergiert auf einem Zyklus der Periode 4.
- Für $\mu = 3.544$ Bifurkation dieser 4 Fixpunkte...
  $\longrightarrow$ 8 Fixpunkte
- Periodenverdopplung



Zusammenfassung

$\mu < 1$ ein stabiler Fixpunkt bei $y^* = 0$;
alle Bahnen enden dort.

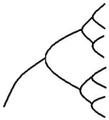
$1 < \mu < 3$ zwei Fixpunkte:

1. stabiler bei $y^* = 0$
2. instabiler

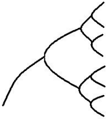
$\mu = 3+$ zweiter Fixpunkt wird instabil (Bifurkation)
$f^2(y_k)$ bekommt zwei neue stabile Fixpunkte
(Grenzzyklus mit Periode 2 wird stabil)

$\mu = 3 + +$ Kaskade von Bifurkationen

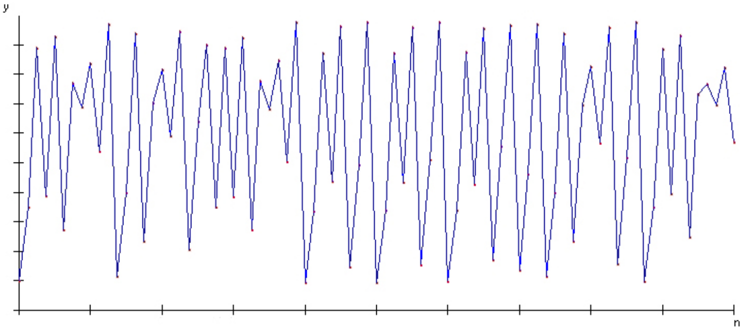
- Erhöhung von μ führt zur Periodenverdopplung
  - Grenzzyklus der Periode 2 geht über in Grenzzyklus der Periode 4
  - 2^1, 2^2, 2^3, ...,2^n
- Grenzfall $n \to \infty$: Periode 2^∞ bei $\mu_\infty = 3.5699456...$ (weiterführende Literatur: [Schuster, 1994])



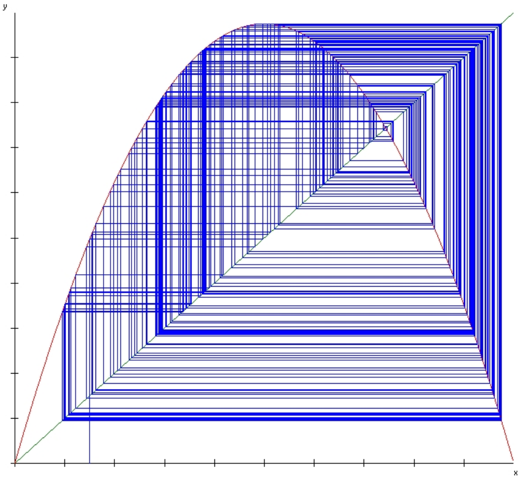
- Erhöhung von μ führt zur Periodenverdopplung
  - Grenzzyklus der Periode 2 geht über in Grenzzyklus der Periode 4
  - 2^1, 2^2, 2^3, ...,2^n
- Grenzfall $n \to \infty$: Periode 2^∞ bei $\mu_\infty = 3.5699456...$ (weiterführende Literatur: [Schuster, 1994])



$\mu > \mu_\infty$: Chaos
deterministisches Chaos
„irreguläres“ (a periodisches) Verhalten
(scheinbar stochastisch)

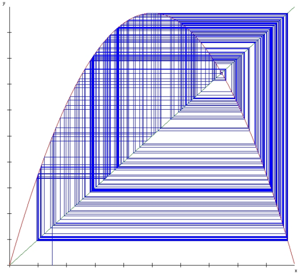


Zeitreihendiagramm für $y_{t+1} = \mu y_t(1 - y_t)$
$t_{max} = 80$; $y_0 = 0.12$; $\mu = 3.9$



Graphische Iteration bis y_{100} für $\mu_\infty < \mu = 3.9$

- Trajektorie verläuft scheinbar zufällig in begrenztem „Gebiet“
- mit steigendem μ wird das „Gebiet“ immer größer
- für μ=4 werden alle Werte zwischen 0 und 1 erfasst
- Bezeichnung des Gebiets: seltsamer Attraktor



seltsamer Attraktor

- beschränkt: alle Trajektorien verlaufen in einem bestimmten Gebiet
- nicht-periodisch: das Gebiet stellt keinen Zyklus oder definierbaren Bereich dar (*seltsam*)

seltsamer Attraktor

- beschränkt: alle Trajektorien verlaufen in einem bestimmten Gebiet
- nicht-periodisch: das Gebiet stellt keinen Zyklus oder definierbaren Bereich dar (*seltsam*)

deterministisches Chaos

- Funktion ist deterministisch
- jeder Wert der Gleichung läßt sich berechnen

siehe Tageslicht-Folien 1 und 2

Einführung
- Strukturelle Stabilität
- Grenzzyklen
- Phasenraum

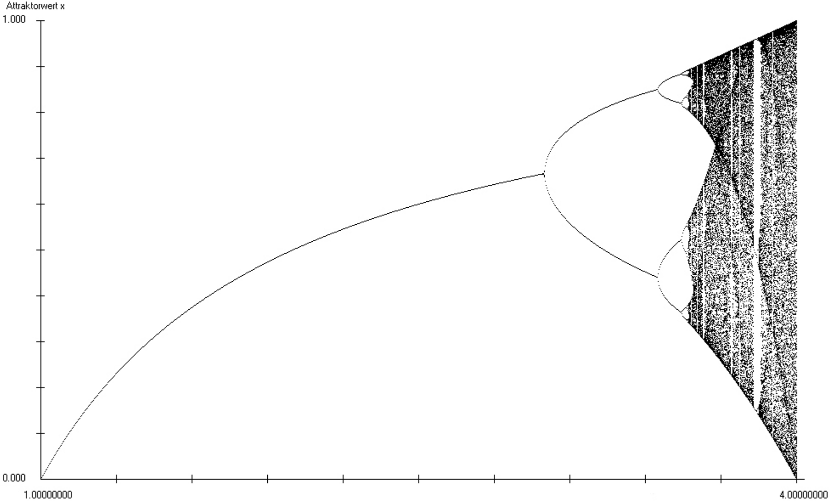
Bifurkation und Feigenbaumdiagramme
- Die logistische Wachstumsfunktion
- Das Feigenbaumdiagramm

Seltsame Attraktoren und ihre Klassifikation
- Der Ljapunov-Exponent
- Das Klimamodell von Edward N. Lorenz

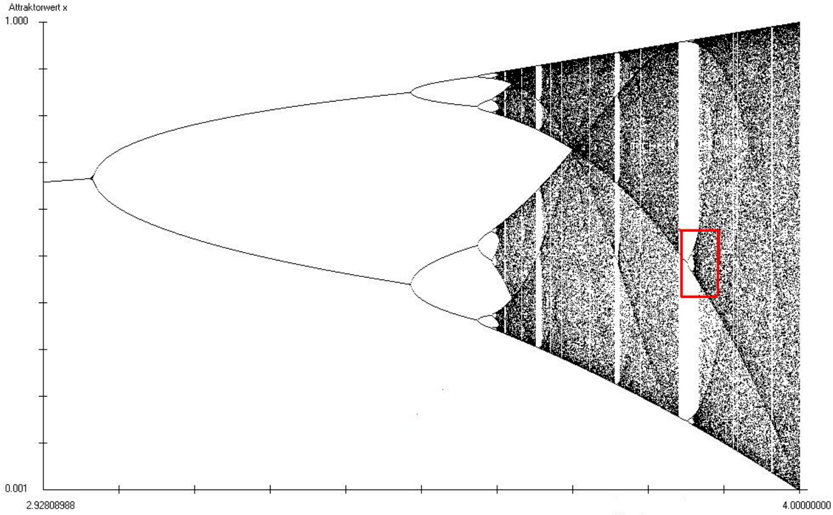
Fraktale und fraktale Dimension
- Fraktale Dimension
- Lineare Fraktale
- Nichtlineare Fraktale

Feigenbaumdiagramm

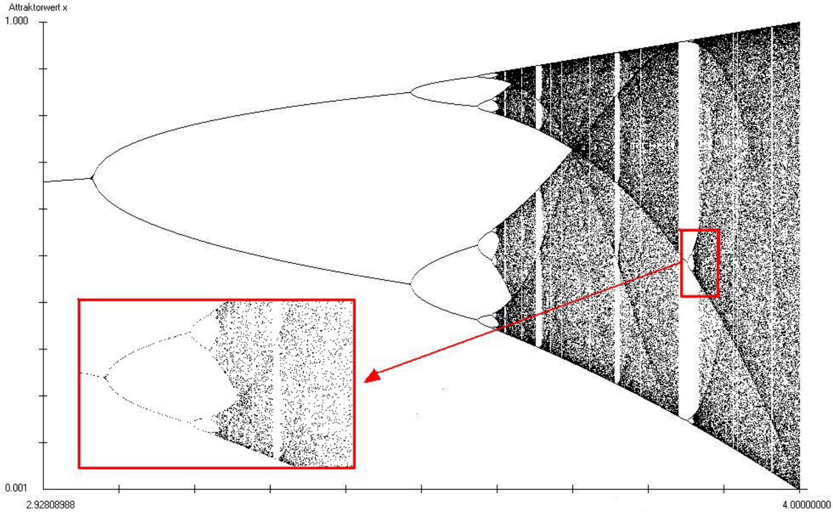
- benannt nach dem amerikanischen Physiker Mitchell J. Feigenbaum (*1945)
- Entdeckung Mitte der siebziger Jahre
- Wird verwendet zur Darstellung des globalen Verhaltens eines Systems
- Dient zur Veranschaulichung des Übergangs Ordnung $\longrightarrow$ Chaos
- Abszisse: μ-Werte
  Ordinate: die zugehörigen y-Werte des (Fixpunkt-, zyklischen-, oder seltsamen-) Attraktors



Feigenbaumdiagramm für $y_{t+1} = \mu y_t(1 - y_t)$



Feigenbaumdiagramm für $y_{t+1} = \mu y_t(1 - y_t)$



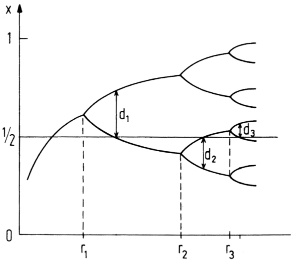
Feigenbaumdiagramm für $y_{t+1} = \mu y_t(1 - y_t)$

Universalität des „Feigenbaums“:

„pitchfork bifurcation“

Für $n >> 1$ gilt:

1. $\mu_n = \mu_\infty - const \cdot \delta_{-n}$
2. $\frac{d_n}{d_{n+1}} = -\alpha$

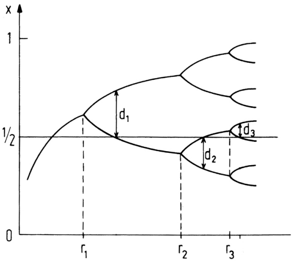


Universalität des „Feigenbaums“:

„pitchfork bifurcation“

Für $n >> 1$ gilt:

1. $\mu_n = \mu_\infty - const \cdot \delta_{-n}$
2. $\frac{d_n}{d_{n+1}} = -\alpha$



Die Feigenbaumkonstanten δ und α haben die Werte:
$\delta = 4.6692016091\ldots$ und $\alpha = 2.5029078750\ldots$

Die Feigenbaumkonstanten δ und α

- $\delta = 4.6692016091\ldots$ und $\alpha = 2.5029078750\ldots$
- sind universell und rational
- treten in einer Vielzahl (deterministisch-)chaotischer Systeme auf
- finden sich in physikalischen Experimenten (elektronische Schaltungen, Turbulenz,...)
- von ähnlich großer Bedeutung (für die Chaostheorie) wie die der Zahlen π und die eulersche Zahl e für die Mathematik

Übergang zum Chaos: universell

- z.B. über Periodenverdopplung
- für alle quadratischen Abbildungen
- für alle Modelle mit folgenden Eigenschaften:
    - Abbildung des Einheitsintervalls auf sich selbst $x \in [0, 1]$
    - unimodal (ein Maximum bei $x = 0.5$)
    - monoton für $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$
    - $Sf = \frac{d^2}{dx^2} \left[f'(x)\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 < 0$ für $0 \leq x \leq 1$
      Schwarz'sche Ableitung (dann auch alle $Sf^n < 0$)

Einführung
Strukturelle Stabilität
Grenzzyklen
Phasenraum
Bifurkation und Feigenbaumdiagramme
Die logistische Wachstumsfunktion
Das Feigenbaumdiagramm
Seltsame Attraktoren und ihre Klassifikation
Der Ljapunov-Exponent
Das Klimamodell von Edward N. Lorenz
Fraktale und fraktale Dimension
Fraktale Dimension
Lineare Fraktale
Nichtlineare Fraktale

Ljapunov-Exponent λ

- benannt nach dem russischen Mathematiker Ljapunov (1857-1918)
- Größe zur quantitativen Charaktierisierung chaotischer Bewegungen
- Maß für den mittleren Verlust an Information (über die Position eines Punktes im Intervall $[0, 1]$) nach einer Iteration
- Maß für Vorhersagbarkeit

Ljapunov-Exponent λ

- benannt nach dem russischen Mathematiker Ljapunov (1857-1918)
- Größe zur quantitativen Charakterisierung chaotischer Bewegungen
- Maß für den mittleren Verlust an Information (über die Position eines Punktes im Intervall $[0,1]$) nach einer Iteration
- Maß für Vorhersagbarkeit

$$x_0 \xrightarrow{\varepsilon} x_0 + \varepsilon \quad \overset{\text{N Iterationen}}{\Longrightarrow} \quad f^N(x_0) \xrightarrow{\varepsilon e^{N\lambda(x_0)}} f^N(x_0 + \varepsilon)$$

$$\Longrightarrow \varepsilon e^{N\lambda(x_0)} = \left| f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0) \right|$$

$$\varepsilon e^{N\lambda(x_0)} = \left| f^N(x_0+\varepsilon) - f^N(x_0) \right|$$

Für $\varepsilon \to 0$ und $N \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\lambda(x_0) &= \lim_{N\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{N} \log \left| \frac{f^N(x_0+\varepsilon) - f^N(x_0)}{\varepsilon} \right| && (12)\\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \left| \frac{d}{dx_0} f^N(x_0) \right| && (13)\\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \left| \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \right| && (14)\\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log \left| f'(x_i) \right| && (15)
\end{aligned}$$

Bleibt noch zu zeigen:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \left| \frac{d}{dx_0} f^N(x_0) \right| = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \left| \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \right|$$

Bleibt noch zu zeigen:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \left| \frac{d}{dx_0} f^N(x_0) \right| = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \left| \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i) \right|$$

„Beweis“ mit Hilfe der Kettenregel:

$$\left.\frac{d}{dx} f^2(x)\right|_{x_0} = \left.\frac{d}{dx} f\left[f(x)\right]\right|_{x_0} \quad (16)$$

$$= f'\left[f(x_0)\right] f'(x_0) \quad (17)$$

$$= f'(x_1) f'(x_0) \qquad \text{mit } x_1 \equiv f(x_0) \quad (18)$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx_0} f^N(x_0) = \prod_{i=0}^{N-1} f'(x_i)$$

Zusammenfassung

$\lambda < 0$: Kontraktion
asymptotisches Aussterben der Störung

$\lambda > 0$: Divergenz
Störung wird angefacht

λ_1	λ_2	λ_3	**Phänomen**
$-$	$-$	$-$	Fokus
0	$-$	$-$	Grenzzyklus
0	0	$-$	Torus
$+$	0	$-$	Seltsamer Attraktor (eigentl. *kein* Chaos, sondern komplexe Ordnung!)

siehe Tageslicht-Folie 3

Einführung
- Strukturelle Stabilität
- Grenzzyklen
- Phasenraum

Bifurkation und Feigenbaumdiagramme
- Die logistische Wachstumsfunktion
- Das Feigenbaumdiagramm

Seltsame Attraktoren und ihre Klassifikation
- Der Ljapunov-Exponent
- Das Klimamodell von Edward N. Lorenz

Fraktale und fraktale Dimension
- Fraktale Dimension
- Lineare Fraktale
- Nichtlineare Fraktale

Klimamodell von Lorenz

Der Lorenzattraktor ist durch ein System 3 gekoppelter nichtlinearer Differentialgleichungen gegeben:

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y$$
$$\dot{y} = rx - y - xz$$
$$\dot{z} = xy - bz$$

σ, r, b sind Modellparameter

Klimamodell von Lorenz

Der Lorenzattraktor ist durch ein System 3 gekoppelter nichtlinearer Differentialgleichungen gegeben:

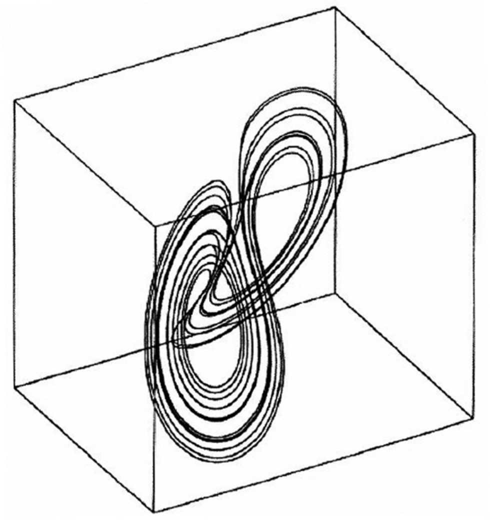
$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y$$
$$\dot{y} = rx - y - xz \qquad \sigma,\ r,\ b \text{ sind Modellparameter}$$
$$\dot{z} = xy - bz$$

Die Jacobi-Matrix lautet: $\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$

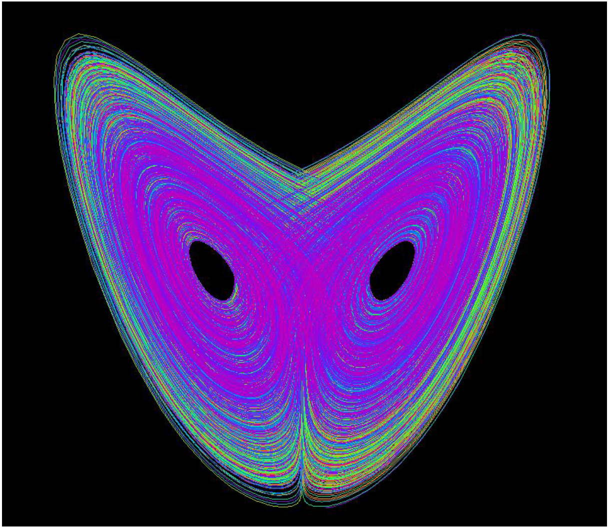
Für die Ljapunov-Exponenten erhalten wir:

$\lambda_1 = 0.9$, $\lambda_2 = 0.0$ und $\lambda_3 = -12.8$

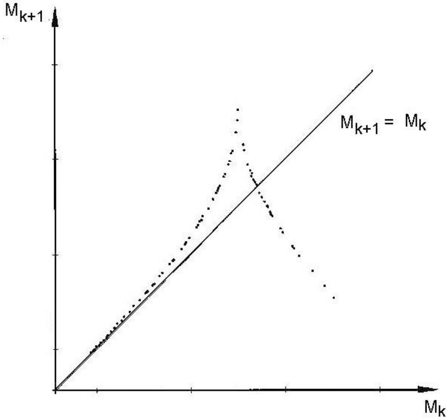
also handelt es sich um einen *seltsamen Attraktor*



Der Lorenz-Attraktor



Der Lorenz-Attraktor Lorenz-Attraktor



Diskrete Abbildung der relativen maximalen M-Werte
(Lorenz, 1963)

Einführung
- Strukturelle Stabilität
- Grenzzyklen
- Phasenraum

Bifurkation und Feigenbaumdiagramme
- Die logistische Wachstumsfunktion
- Das Feigenbaumdiagramm

Seltsame Attraktoren und ihre Klassifikation
- Der Ljapunov-Exponent
- Das Klimamodell von Edward N. Lorenz

Fraktale und fraktale Dimension
- Fraktale Dimension
- Lineare Fraktale
- Nichtlineare Fraktale

Dimension

- dient zur Charakterisierung geometrischer Objekte
- in der euklidischen Geometrie: Dimension ganzzahlig

Objekt	**Dimension**
Punkt	0
Linie	1
Fläche	2
Kubus	3

Wie lang ist die Küstenlinie von Großbritannien?

- die Längenmessung der Küste hängt vom verwendeten Maßstab ab
  1. grobe Karte: erste Annährung
  2. genaueres Kartenmaterial (mehr Buchten, Landzungen): genauere Annäherung
  3. Umwanderung der Insel mit Meßlatte

Wie lang ist die Küstenlinie von Großbritannien?

- die Längenmessung der Küste hängt vom verwendeten Maßstab ab
  1. grobe Karte: erste Annährung
  2. genaueres Kartenmaterial (mehr Buchten, Landzungen): genauere Annäherung
  3. Umwanderung der Insel mit Meßlatte
- die Küste umschließt eine endliche Fläche,
  aber mit wachsender Meßgenauigkeit wächst die Umfangslinie ins Unendliche

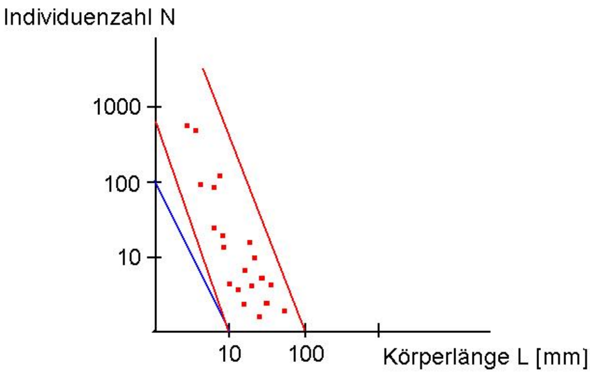
Wie lang ist die Küstenlinie von Großbritannien?

- die Längenmessung der Küste hängt vom verwendeten Maßstab ab
  1. grobe Karte: erste Annährung
  2. genaueres Kartenmaterial (mehr Buchten, Landzungen): genauere Annäherung
  3. Umwanderung der Insel mit Meßlatte
- die Küste umschließt eine endliche Fläche, aber mit wachsender Meßgenauigkeit wächst die Umfangslinie ins Unendliche
- **Lösung:** Küste ist ein Mittelding zwischen Linie und Fläche von nichtganzzahliger Dimension (Mandelbrot)

Wieviele Käfer passen auf ein Blatt?

- Erwartete Anzahl von Käfern bei einer Blattoberfläche mit der Dimension $D = 2$

Körperlänge L	**Anzahl** N
l	c
$\frac{l}{2}$	$c \cdot 2^2 = c \cdot 4$
$\frac{l}{3}$	$c \cdot 3^2 = c \cdot 9$
$\frac{l}{x}$	$c \cdot x^2$



- erwartet: $N \sim L^{-2}$, gemessen $N \sim L^{-2.78}$
- z.B. für $x = 10$:
  erwartet: $100 = x^2$, gemessen: $600 = x^{2.78}$

Hausdorff-Besicovitch-Dimension

- Gegeben: Objekt im d-dimensionalen Raum
- Vorschrift:
  - Überdecke Objekt mit d-dimensionale Kugeln mit Durchmesser λ
  - Ermittle die minimale Anzahl $N(\lambda)$ von Kugeln, die zur Überdeckung notwendig sind

$$\Rightarrow N(\lambda) \underset{\lambda \to 0}{\sim} \lambda^{-D}$$

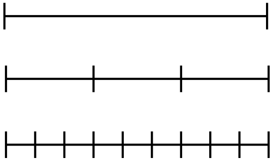
$$D = \lim_{\lambda \to 0} - \frac{\log \left[\frac{N(\lambda)}{N(\lambda')} \right]}{\log \left[\frac{\lambda}{\lambda'} \right]}$$

Beispiel: Hausdorff-Dimension einer Linie

$\lambda = 1$ $N = 1$

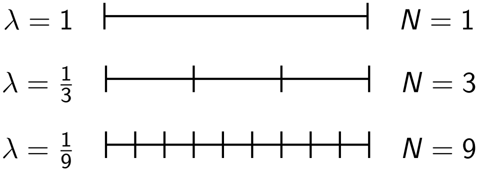
$\lambda = \frac{1}{3}$ $N = 3$

$\lambda = \frac{1}{9}$ $N = 9$



λ: Durchmesser; N: Anzahl

Beispiel: Hausdorff-Dimension einer Linie

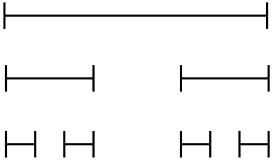


λ: Durchmesser; N: Anzahl

$$D = \lim_{\lambda \to 0} - \frac{\log\left[\frac{N(\lambda)}{N(\lambda')}\right]}{\log\left[\frac{\lambda}{\lambda'}\right]}$$

hier: $D = -\frac{\log\left(\frac{1}{3}\right)}{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)} = 1$

Beispiel: Dimension der Cantor-Menge



$\lambda = 1$ $\quad N = 1$

$\lambda = \frac{1}{3}$ $\quad N = 2$

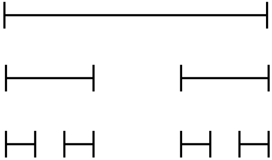
$\lambda = \frac{1}{9}$ $\quad N = 4$

Beispiel: Dimension der Cantor-Menge

$\lambda = 1$ $\quad N = 1$

$\lambda = \frac{1}{3}$ $\quad N = 2$

$\lambda = \frac{1}{9}$ $\quad N = 4$



$$D = -\frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309$$

$$L = \lambda\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27} - \cdots\right) = \lambda\left[1 - \frac{1}{3}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{\nu}\right]$$

$$= \lambda\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right)\right] = 0 \; !$$

Fraktal

- Benoit Mandelbrot (*1924)
- aus dem lateinischen, fractum: Bruchstück
- ist irregulär
- fraktale Dimension ist größer als die topologische Dimension
- weist Selbstähnlichkeit auf
- besitzt keine Glatte, sondern eine zerklüftete Form

Einführung
- Strukturelle Stabilität
- Grenzzyklen
- Phasenraum

Bifurkation und Feigenbaumdiagramme
- Die logistische Wachstumsfunktion
- Das Feigenbaumdiagramm

Seltsame Attraktoren und ihre Klassifikation
- Der Ljapunov-Exponent
- Das Klimamodell von Edward N. Lorenz

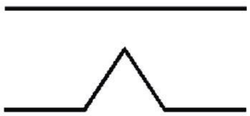
Fraktale und fraktale Dimension
- Fraktale Dimension
- Lineare Fraktale
- Nichtlineare Fraktale

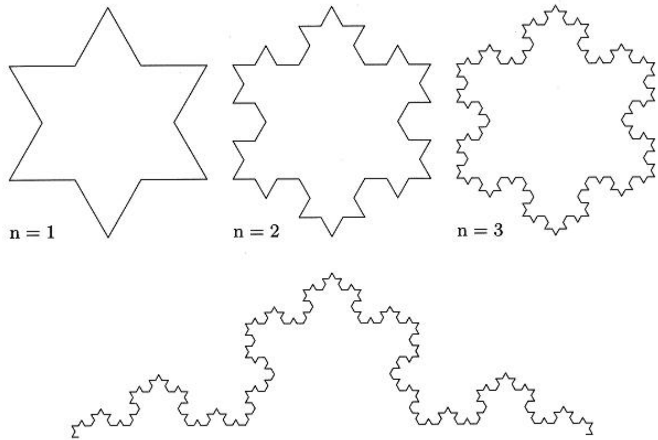
Koch-Kurve (um 1904)

- Gegeben: Linienstück der Länge „1“
- Iteration:
  - unterteile jedes Linienstück in drei gleichlange Stücke
  - errichte gleichseitiges Dreieck auf dem mittleren Stück
  - entferne die Basis dieses Dreieckecks

Koch-Kurve (um 1904)

- Gegeben: Linienstück der Länge „1“
- Iteration:
  - unterteile jedes Linienstück in drei gleichlange Stücke
  - errichte gleichseitiges Dreieck auf dem mittleren Stück
  - entferne die Basis dieses Dreieckecks
- Länge: unendlich; Fläche: begrenzt
- Dimension $D = 1.261859$
  $\Rightarrow$ Kurve ist weder Linie
  noch Fläche





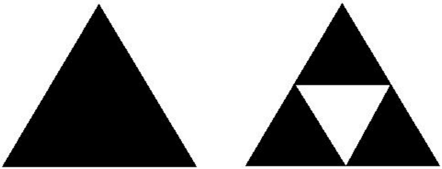
Konstruktion der Kochschen Schneeflockenkurve

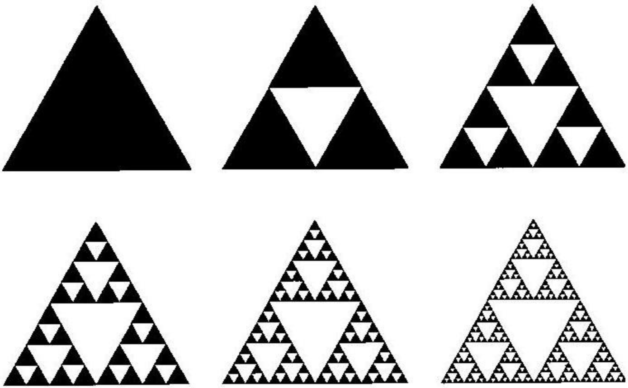
Kochsche Schneeflockenkurve

Das Sierpinski-Dreieick

Konstruktionsvorschrift:

- Gegeben: ein gefülltes Dreieck
- Iteration:
  - Verbinde die Mittelpunkte seiner drei Seiten
  - Erhalte so 4 kongruente Dreiecke
  - entferne das im Zentrum liegende Dreieck





Konstruktion des Sierpinski-Dreiecks

Sierpinski-Dreieck

Einführung
- Strukturelle Stabilität
- Grenzzyklen
- Phasenraum

Bifurkation und Feigenbaumdiagramme
- Die logistische Wachstumsfunktion
- Das Feigenbaumdiagramm

Seltsame Attraktoren und ihre Klassifikation
- Der Ljapunov-Exponent
- Das Klimamodell von Edward N. Lorenz

Fraktale und fraktale Dimension
- Fraktale Dimension
- Lineare Fraktale
- Nichtlineare Fraktale

Julia-Menge

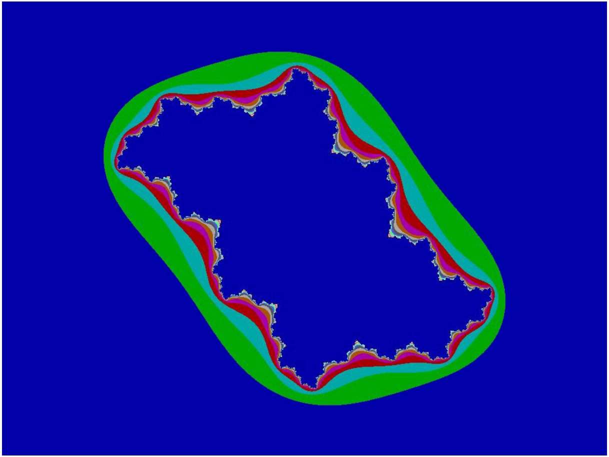
$$
\begin{aligned}
z_{k+1} &= z_k^2 - c && (19)\\
&= f_c(z_k) \text{ mit } z, c \in \mathbb{C} && (20)
\end{aligned}
$$

Sei c gegeben, z.B. $c = 0.194 - 0.6557i$

- ? Wertebereich für $z_0 \longrightarrow$ Attraktor (Bassin)
  z.B. $z^* = 11erZyklus$, $z^* = \infty$
- ? Grenze zwischen zwei Bassins

$J_c =$ Grenze von $\left\{ z \,\middle|\, \lim\limits_{n\to\infty} f_c^k(z) \to \text{Attraktor} \right\}$

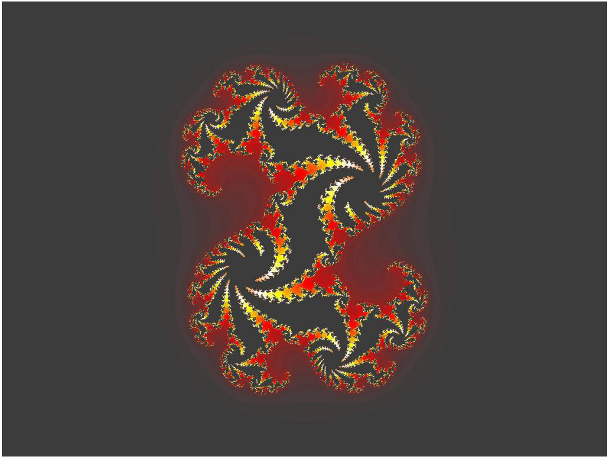
Julia-Menge: zusammenhängend $\leftrightarrow$ nicht zusammenhängend



Julia-Menge J_c der Abbildung $f_c(z) = z^2 + c$

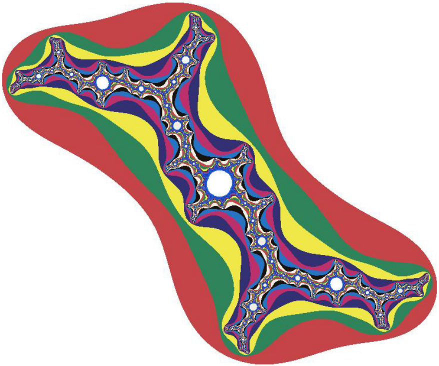
für $c = -0.1237 + 0.5651i$

Jordan-Kurve

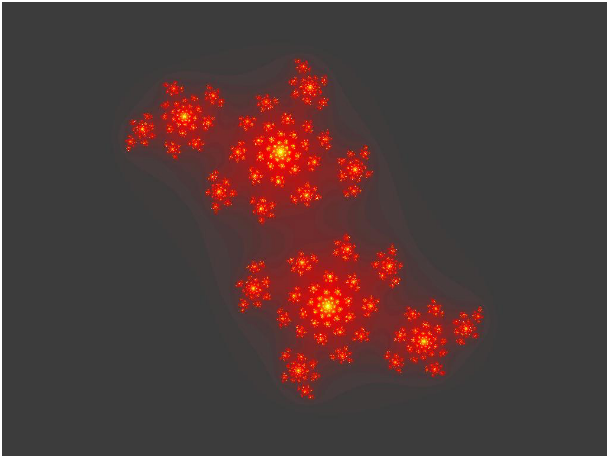


Julia-Menge J_c der Abbildung $f_c(z) = z^2 + c$
für $c = 0.32 + 0.043i$

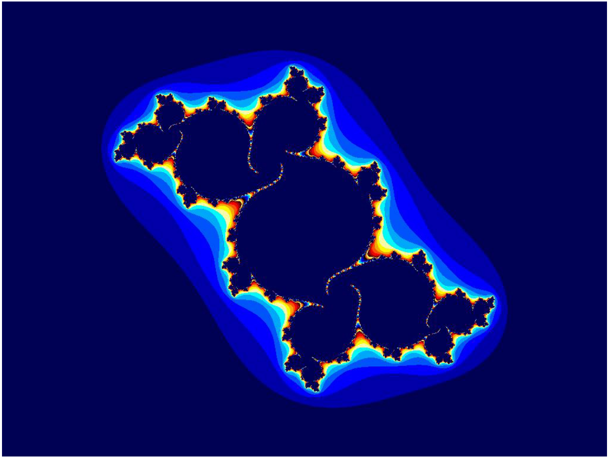
zusammenhängend, inneres Bassin: Zykel der Periode 11



Julia-Menge J_c der Abbildung $f_c(z) = z^2 + c$
für $c = -0.156 + 1.032i$
Dendrit

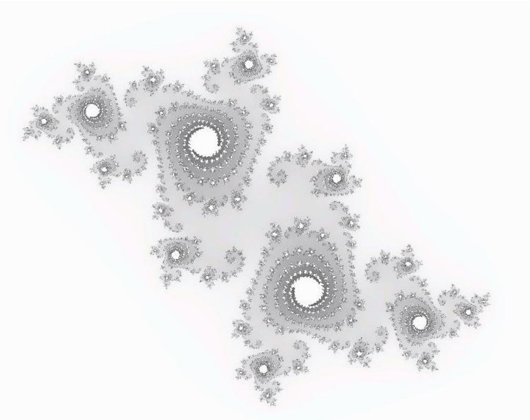


Julia-Menge J_c der Abbildung $f_c(z) = z^2 + c$
für $c = 0.08 + 0.67037i$
Cantor-Menge



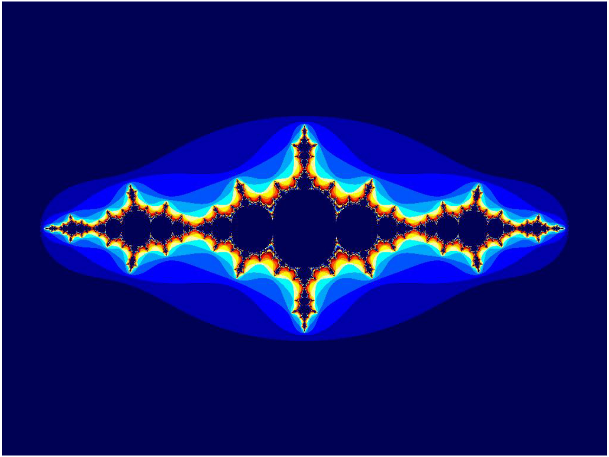
Julia-Menge J_c der Abbildung $f_c(z) = z^2 + c$
für $c = -0.11 + 0.6557i$

zusammenhängend, kurz vor dem Zerfall in eine Cantor-Menge



Julia-Menge J_c der Abbildung $f_c(z) = z^2 + c$
für $c = -0.194 + 0.6557i$

Cantor-Menge,
entstanden nach geringer Variation des Parameters c



Julia-Menge J_c der Abbildung $f_c(z) = z^2 + c$
für $c = -1.25$

Mandelbrot-Menge

$$z_{k+1} = z_k^2 - c \qquad (21)$$

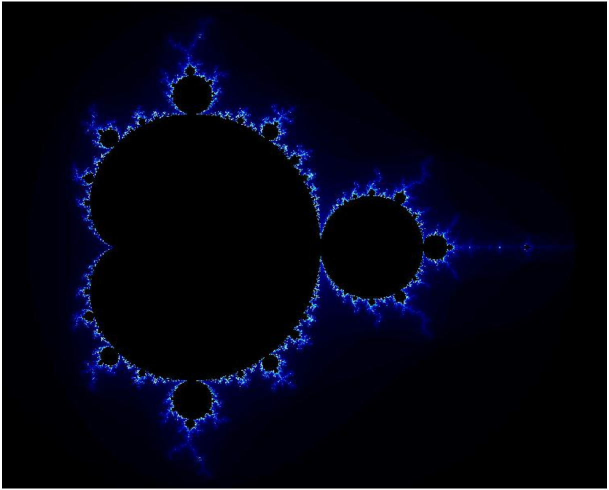
$$= f_c(z_k) \text{ mit } z, c \in \mathbb{C} \qquad (22)$$

Sei z_0 gegeben, z.B. $z_0 = 0$

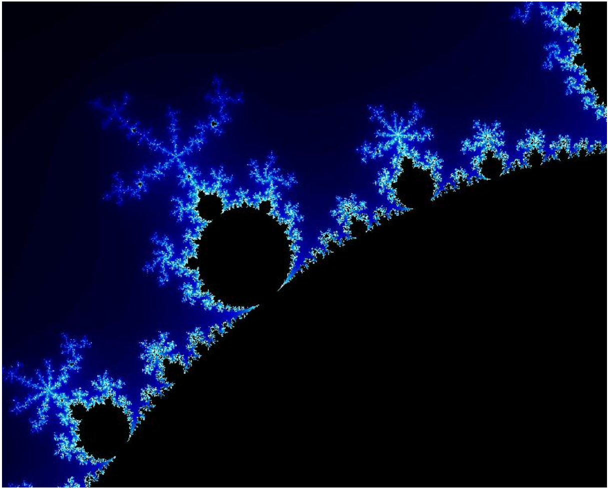
? Bereich der Parameterwerte c,
für die J_c zusammenhängend ist

$$M = \left\{ c \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} f_c^k(0) \not\to \infty \right\}$$

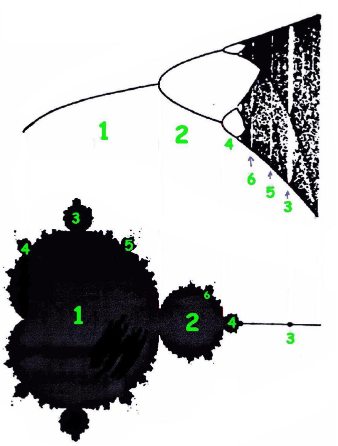
Mandelbrot-Menge: zusammenhängend, fraktale Struktur



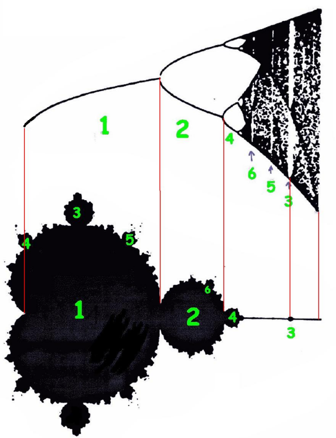
Mandelbrot-Menge (Apfelmännchen)



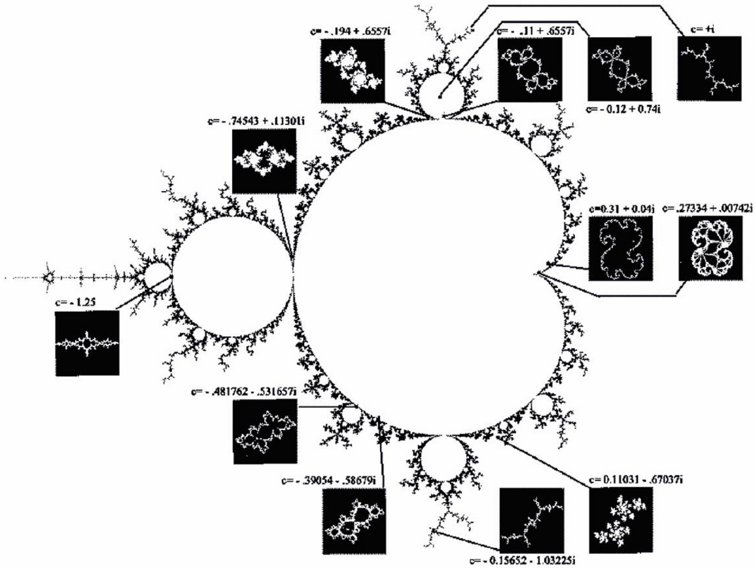
Mandelbrot-Menge (Ausschnittsvergrößerung)



Zusammenhang zwischen Mandelbrot-Menge und der Periodenverdopplungskaskade der logistischen Abbildung



Zusammenhang zwischen Mandelbrot-Menge und der Periodenverdopplungskaskade der logistischen Abbildung


c= - .194 + .6557i
c= - .11 + .6557i
c= +i
c= - 0.12 + 0.74i
c= - .74543 + .11301i
c=0.31 + 0.04i
c= .27334 + .00742i
c= - 1.25
c= - .481762 - .531657i
c= - .39054 - .58679i
c= 0.11031 - .67037i
c= - 0.15652 - 1.03225i

Argyris, J., Faust, G., and Haase, M. (1994).
Die Erforschung des Chaos: eine Einführung für Physiker, Ingenieure und Naturwissenschaftler.
Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden.
ISBN 3-528-08941-5.

Peitgen, H.-O., Jürgens, H., and Saupe, D. (1992).
Bausteine des Chaos: Fraktale.
Springer-Verlag, Berlin.
ISBN 3-540-55781-4.

Schuster, H. G. (1994).
Deterministisches Chaos. Eine Einführung.
VDH, Weinheim.
ISBN 3-527-29089.