globales Optimum / lokale Optima

Variablenvektor x
Zielfunktion $f(x)$
Restriktionsfunktionen $g_j(x)$
} alle reell

$f: M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wobei $M \neq \emptyset$

zulässiger Bereich $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \geq 0 \ \forall j = 1 \ldots n\}$

gesucht $f^* = f(x^*)$ so daß $x^* \in M$ und

$$\forall x \in M : f(x^*) \leq f(x)$$

f^* globales Minimum ; $x^* = \operatorname{argmin}\{f(x) : x \in M\}$ Minimalstelle(n)

o.B.d.A. weil $\max(f(x)) = -\min(-f(x))$

wg. begrenzter Rechengenauigkeit genügt

Umgebung $U_\varepsilon(x^*) := \{x \in M : \|x - x^*\| \leq \varepsilon\}$
oder
Niveaumenge $L_{f^*+\eta} := \{x \in M : f(x) \leq f(x^*) + \eta\}$

---

lokales Minimum f^+, x^+

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \forall x \in M : \|x - x^+\| < \varepsilon \Rightarrow f(x^+) \leq f(x)$$

also ist globales M. auch ein lokales M.
(Umkehrung gilt nicht allgemein)

wenn nur ein lok. M = glob. M. : $f(x)$ unimodal

sonst : multimodal