Bsp. harmonischer Oszillator

$$\ddot{p} + \omega^2 p = 0 \qquad \text{bzw. mit} \quad x_1 = p, \quad x_2 = \dot{p}$$

(3.13) $$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 x_1 \end{aligned}\right\} \text{ mit } \bar{x} = 0 \text{ Gleichgew.}$$

wir wählen : $V(x_1, x_2) = E_{gesamt} = \frac{x_2^2}{2} + \frac{\omega^2 x_1^2}{2}$

- V ist def. für alle $x \in \mathbb{R}^2$
- V ist positiv außer für $\bar{x} = 0$
- Kurven $V = \text{const.}$: konzentrische Ellipsen in (x_1, x_2)-Ebene bzw $(p, \dot{p})$-Phasenebene
- je geringer Gesamtenergie, desto kleinere Ellipse

entlang einer Trajektorie $x(t)$ gilt

$$\dot{V} = \frac{d}{dt} V(x(t)) = \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V(x)}{\partial x_2} \dot{x}_2 = \omega^2 x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2$$

(Kettenregel) mit (3.13) :

$$\dot{V} = 0$$

folgt :

jeder Orbit von (3.13) ist begrenzt durch eine Niveaulinie von V; V ist nicht wachsend (hier const.) entlang jeder Trajektorie des Systems

allgemeiner : $\dot{V} \leq 0$ (Beweis siehe Buch)

es gibt viele Ljapunov-Funktionen für ein System

$\dot{V} = 0$ konservatives System

$\dot{V} < 0$ dissipatives System