3.9 Ljapunov - Funktionen

Sei $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$ isoliertes Gleichgew. von $\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$

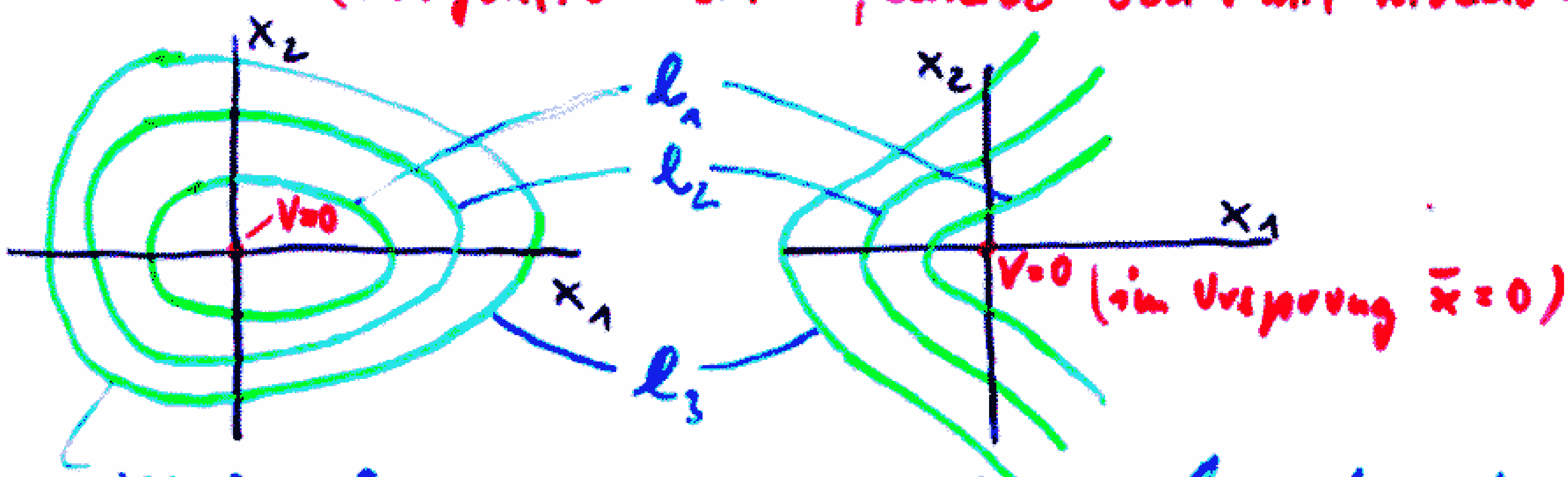
nichtlin. System, definiert für alle $x \in U \subseteq \mathbb{R}^2$

V sei glatte skalare Funktion, definiert auf U, so daß

$V(\bar{x}) = 0$ und $V(x) > 0$ für $x \neq \bar{x}$

$V(x) = \ell > 0$ ist eine Niveaulinie in U
(Projektion einer ‚Scheibe' von V mit Niveau ℓ)

z.B.



$V(x) = \ell = \text{const.}$ hier: $\ell_1 < \ell_2 < \ell_3$

Ω offene Umgebung um $\bar{x}$; $\Omega \subset U$
$\Omega_0 \subset \Omega$ (kleine) Nachbarumgebung von $\bar{x}$, für die $V(x) < \ell$

Annahme: Orbits kreuzen niemals eine Niveaulinie von innen nach außen

Dann gilt: Wenn ein Orbit in Ω_0 beginnt, so bleibt er darin ‚gefangen', bleibt also auch in Ω; Darum ist $\bar{x}$ stabil

V ist Ljapunov-Funktion! ; Bedingungen ($\dot{V} \leq 0$)
(Beispiel: Gesamtenergie)