Lösung nichtlinear Gleichungssysteme durch iterative Prozesse

Der Gauss Seidel Prozess

- versucht die schnellen negativ rückgekoppelten Prozesse der Realität in vereinfachter Form abzubilden
- ist bei großen Gleichungssystemen das einzig praktikable Verfahren

$$F_i(\{x_j \mid j = 1, \dots n) = 0 \qquad (i = 1, \dots n)$$

$$x_i := f_i(\{x_j \mid j \neq i\}) \qquad (i = 1, \dots n)$$

Konvergenzrate:

$$\max_i |x_i^{t+1} - x_i^t| \sim |\lambda \max|^t \qquad \text{für } t \to \infty$$

$\lambda \max$: größter Eigenwert der Jakobimatrix $\left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\}$

2 hinreichende Bedingungen für die Konvergenz der Gaus Seidel Iteration

a) Diagonaldominanz:

$$x_i^{t+1} = f_i(\{x_j^t \mid j \neq i\})$$

falls $\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j} < 1$ für $(j = 1, \dots n)$

oder $\sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} < 1$ für $(i = 1, \dots n)$

dann $|\lambda \max| < 1$

b) fast rekursive Gleichungen:

$$x_i^{t+1} = R_i(\underline{x}^t) + \varepsilon \cdot F_i(\underline{x}^t)$$

$$\frac{\partial R_i}{\partial x_j} = 0 \quad \text{für } j > i; \quad \|F\| = 1$$

$$|\lambda \max| \sim \varepsilon$$