

Übungen zur Vorlesung  
**Ausgewählte Kapitel der Algorithmik – Geometrische  
Approximationsalgorithmen**  
WS 21/22  
Blatt 6

**Aufgabe 6.1** (Grundlagen)

- a) Was ist ein Range Space? Schreiben Sie die Definition und geben Sie einige Beispiele.
- b) Was ist die VC-dimension eines Range Spaces? Leiten Sie (soweit möglich) für die Beispiele in a) die VC-Dimension her.
- c) Was ist die Shattering Dimension eines Range Spaces? Leiten Sie für die Beispiele in a) die Shattering Dimension her.

**Aufgabe 6.2** (Komplement eines Range Spaces)

Das Komplement eines Range Space  $(X, \mathcal{R})$  ist  $(X, \mathcal{R}^c)$ , wobei  $\mathcal{R}^c := \{X \setminus r \mid r \in \mathcal{R}\}$ . Zeigen Sie, dass ein Range Space und sein Komplement die gleiche VC-dimension haben.

**Aufgabe 6.3** (Dualer Range Spaces)

Für einen Range Space  $S = (X, \mathcal{R})$  und  $p \in X$ , definieren wir  $\mathcal{R}_p := \{r \in \mathcal{R} \mid p \in r\}$ , also die Menge der Ranges die  $p$  enthalten. Der Duale Range Space von  $S$  ist definiert als  $(\mathcal{R}, X^*)$ , wobei  $X^* := \{R_p \mid p \in X\}$ .

Wir betrachten im Folgenden den Range Space  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{AR})$ , wobei  $\mathcal{AR}$  die Menge der achsenparallelen Rechtecke ist. Sei  $B$  eine endliche Menge von achsenparallelen Rechtecken und  $S^*_B$  die Restriktion des dualen Range Space auf  $B$ .

- a) Veranschaulichen Sie  $S^*_B$  an einem kleinen Beispiel mit einer Zeichnung. Für welche Punkte  $p, q \in \mathbb{R}^2$  gilt  $R_p = R_q$ ?
- b) Was ist die Shattering Dimension des dualen Range Spaces von  $S$ ?

**Aufgabe 6.4** ([Heimaufgabe] Quadrate und Rechtecke)

- a) Was ist die VC-Dimension und Shattering Dimension von achsenparallelen Quadraten (d.h., von dem Range Space  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{AQ})$ , wobei  $\mathcal{AQ}$  die Menge der achsenparallelen Quadrate ist)?

- b) Zeigen Sie: Die VC-Dimension von Rechtecken beliebiger Orientierung ist  $\geq 6$ .
- c) Leiten Sie her: Die Shattering Dimension von Rechtecken beliebiger Orientierung ist 5.  
*Hinweis falls Sie nicht weiter kommen: Das Buch gibt ein Argument hierfür, dass Sie auch als Grundlage Ihrer Antwort nehmen können.*